Feuille d'exercices n°3

Manipulations d'ensembles

Exercice 1. Écrire sous une des formes du cours les ensembles :

1. des entiers naturels divisibles par 7
2. des sommes de deux carrés d'entiers
3. des nombres rationnels qui possèdent un antécédent par la fonction $x \mapsto e^x + x$

♢ **Exercice 2** (Revoir les définitions). Soient $A = \{1, 2, 3\}, B = \{0, 1, 1\}$. Lister les éléments de $A \cup B, A \cap B, A \times B$ et $\mathcal{P}(A)$

Exercice 3. Lesquelles des écritures suivantes désignent-elles le même ensemble ?

1. $\{x^2 + 1 | x \in \mathbb{R}\}$
2. $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | x \geqslant y\}$
3. $\{n \in \mathbb{N} | \forall k \in \mathbb{N}, n = 3k\}$
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > y\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$
5. $\{3k | k \in \mathbb{Z}\}$
6. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > y\} \cup \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$
7. $\{y \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathbb{R}, y = x^2 + 1\}$
8. $[1; +\infty[$
9. l'ensemble des entiers relatifs divisibles par 3
10. $\varnothing$

♢ **Exercice 4.** Soient A, B deux parties d'un ensemble E et $D = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Montrer que $D = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Exercice 5. Représenter graphiquement (dans le plan $\mathbb{R}^2$) les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ définis par $A = [-1; 1] \times \mathbb{N}, B = \mathbb{Z} \times [2; +\infty[$ et $C = A \cap B$. Donner des exemples d'éléments de chacun de ces ensembles.

Injectivité, surjectivité, images et antécédents

Exercice 6. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives ou aucun des deux ?

1. $f : \begin{array}{ccc} [-1; 3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x+1| \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} [-3; 3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x^2 - 3| \end{array}$
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (p, q) & \longmapsto & \frac{p}{q} \end{array}$

Exercice 7. Soient E, F des parties de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ la fonction carré. Donner des exemples de E et F tels que

1. f soit injective mais pas surjective
2. f soit surjective mais pas injective
3. f soit injective et surjective
4. f ne soit ni injective ni surjective

Exercice 8. Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux fonctions.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
3. En déduire que si $G = E$, $g \circ f = id_F$ et $f \circ g = id_E$, **alors** f et g sont bijectives
4. A-t-on dans le premier cas g nécessairement injective ? et f surjective dans le deuxième ?
   Selon votre réponse, il faudra démontrer la propriété annoncée ou l'invalider par un contre-exemple (patatoïde, par exemple)

♢ **Exercice 9** (Fonction réciproque - avec une candidate). Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \backslash \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \backslash \{-1\} \\ x & \longmapsto & \frac{1-x}{1+x} \end{array}$

1. Déterminer $f \circ f$
2. Montrer que f est bijective

Exercice 10 (Fonction réciproque - algébriquement). Soit $A = \mathbb{R} \backslash \{-\frac{7}{3}\}$ et $f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2x+1}{3x+7} \end{array}$

Déterminer $f(A)$, montrer que $f : A \to f(A)$ est bijective, et trouver une formule explicite pour f^{-1}

♠ **Exercice 11** (Préimage)**.** Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Pour $B \in \mathcal{P}(F)$, on appelle **préimage** de B, notée f^{-1}(B) l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

Remarque : c'est seulement une **notation** d'ensemble, qui engendre un conflit de notation puisque f n'est **pas supposée bijective**

1. Soit $y \in F$. Comment appelle-t-on les éléments de $f^{-1}(y)$?
2. Soient B_1, B_2 deux parties de F. Montrer que $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
3. Montrer que $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Exercice 12 (Composition itérée)**.** Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Déterminer $f \circ f \circ \ldots \circ f(x)$ (où le symbole f apparaît n fois) en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et de $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que cette composition est bien définie (sur quel ensemble de définition ?)

Cardinaux, dénombrements, coefficients binômiaux

♡ **Exercice 13.** Soient A, B, C trois parties d'un ensemble fini. Exprimer $|A \cup B \cup C|$ en fonction de $|A|, |B|, |C|$ et de cardinaux d'intersections de A, B, C

♢ **Exercice 14.** Déterminer le nombre d'anagrammes (sans tenir compte du sens) des mots : Maths, Anglais, Anagramme

Exercice 15 (Lemme des tiroirs)**.**

1. En raisonnant par contraposition, justifier la phrase : «Si $n+1$ paires de chaussettes sont rangées dans n tiroirs, alors il existe au moins un tiroir qui contient au moins deux paires»
2. Soit $\{x_1, \ldots, x_{10}\}$ une partie de $[|1; 100|]$, c'est-à-dire que $x_1, \ldots, x_{10}$ sont des nombres entiers distincts entre 1 et 100. Montrer qu'on peut en extraire deux sous-ensembles (disjoints et non vides) ayant la même somme.
   Exemple : si on prend $2, 3, 11, 31, 45, 50, 71, 87, 90, 99$ comme valeurs de $x_1, \ldots, x_{10}$, alors on a par exemple : $2 + 3 + 45 = 50$ et donc $\{2; 3; 45\}$ et $\{50\}$ conviennent.

Exercice 16 (Des propriétés des coefficients binômiaux)**.**

1. Montrer : $\forall k, p, n \in \mathbb{N}, \binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$. Interpréter cette formule de manière combinatoire en dénombrant les façons de choisir dans un ensemble à n éléments un sous-ensemble A à p éléments et un sous-ensemble B de A à k éléments.
2. Pour quelles valeurs de $n, p, q \in \mathbb{N}$ a-t-on $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$? et $\binom{n}{p} < \binom{n}{p+1}$? Que peut-on en déduire sur la structure d'une ligne du triangle de Pascal ?

Exercice 17. En utilisant la formule explicite des coefficients binômiaux, montrer que pour tout n entier, tout produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$
Exemple : tout produit de 4 nombres consécutifs est divisible par 24. On peut le vérifier sur l'exemple $3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 21 \times 24$

♠ **Exercice 18** (Abstrait)**.** Soit E un ensemble (pas nécessairement fini). Montrer **par l'absurde** qu'il n'existe pas d'application surjective $f : E \to \mathcal{P}(E)$.
Indication : supposer par l'absurde qu'une telle application f existe et considérer l'ensemble $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$