Feuille d'exercices n°3

Exercice 8. Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux fonctions.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
   Soient g, f telles que $g \circ f$ est injective. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors, en appliquant la fonction g :
   $$g(f(x)) = g(f(x'))$$
   i.e. $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ et par injectivité de $g \circ f$, on déduit $\boxed{x = x'}$ donc f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
   Soient g, f telles que $g \circ f$ est surjective. Soit $y \in G$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.
   Puisque $f(x) \in F$ et que $y = g\left(f(x)\right)$, alors y a un antécédent par g dans F, et donc g est surjective.

3. En déduire que si $G = E$, $g \circ f = id_F$ et $f \circ g = id_E$, **alors** f et g sont bijectives
   id_F et id_E sont clairement bijectives. Puisque $g \circ f$ est bijective, alors g est surjective et f est injective. Puisque $f \circ g$ est bijective, alors f est surjective et g est injective. On en conclut que f et g sont bijectives.
4. A-t-on dans le premier cas g nécessairement injective ? et f surjective dans le deuxième ?
   Selon votre réponse, il faudra démontrer la propriété annoncée ou l'invalider par un contre-exemple (patatoïde, par exemple)
   La réponse aux deux questions est **non**. On peut faire un exemple patatoïde, mais pour m'éviter de devoir faire des graphiques sur ordinateur, je vous propose des contre exemples non patatoïdes.
   Prenons $E = G = [|1;2|]$ et $F = [|1;3|]$. Alors, en prenant $f : \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 1 \\ 2 & \mapsto & 2 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 1 \\ 2 & \mapsto & 2 \\ 3 & \mapsto & 2 \end{array} \right.$,
   alors $g \circ f = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 1 \\ 2 & \mapsto & 2 \end{array} \right.$. $g \circ f$ est bijective mais f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

♠ **Exercice 11** (Préimage)**.** Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Pour $B \in \mathcal{P}(F)$, on appelle **préimage** de B, notée f^{-1}(B) l'ensemble :
$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$
Remarque : c'est seulement une **notation** d'ensemble, qui engendre un conflit de notation puisque f n'est **pas supposée bijective**

1. Soit $y \in F$. Comment appelle-t-on les éléments de $f^{-1}(\{y\})$?
   C'est l'ensemble des antécédents de y
2. Soient B_1, B_2 deux parties de F. Montrer que $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
   Soit $x \in E$.
   $$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ &\iff f(x) \in B_1 \text{ ou } f(x) \in B_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \text{ ou } x \in f^{-1}(B_2) \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$
   Ainsi, $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
3. Montrer que $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
   Soit $x \in E$.
   $$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\iff f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\iff f(x) \in B_1 \text{ et } f(x) \in B_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \text{ et } x \in f^{-1}(B_2) \\ &\iff x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

Exercice 12 (Composition itérée)**.** Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Déterminer $f \circ f \circ \ldots \circ f(x)$ (où le symbole f apparaît n fois) en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et de $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que cette composition est bien définie (sur quel ensemble de définition ?)

Il faut commencer par un peu de brouillon ... On remarque déjà que f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Pour $x \neq -1$, on peut donc calculer $f(x)$, mais on ne peut calculer $f(f(x))$ que si, par ailleurs, $f(x) \neq -1$, i.e. $\frac{x}{x+1} \neq -1$ i.e. $x \neq -(x+1)$ ou encore $x \neq -\frac{1}{2}$. Ainsi, $f \circ f$ est définie sur $E_2 = \mathbb{R}\backslash\{-1; -\frac{1}{2}\}$ et pour $x \in E_2$:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1}$$

De même pour $n = 3$: $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x)))$ est défini si $x \neq -1, x \neq -\frac{1}{2}$ et $f(x) \neq -\frac{1}{2}$. Or $f(x) = -\frac{1}{2} \iff \frac{x}{x+1} = -\frac{1}{2} \iff 2x \neq -(x+1) \iff x \neq -\frac{1}{3}$. On a donc $f \circ f \circ f$ définie sur $E_3 = \mathbb{R}\backslash\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\}$ et pour $x \in E_3$:

$$(f \circ f \circ f)(x) = f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1} = \frac{x}{3x+1}$$

Au vu de ces trois premiers exemples, on peut conjecturer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f \circ f \circ \ldots \circ f$ est définie sur $E_n = \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{n}\}$ et pour $x \in E_n$: $(f \circ \ldots \circ f)(x) = \frac{x}{nx+1}$. Démontrons cette propriété par récurrence. L'initialisation est déjà effectuée (pour $n = 1$, ou pour $n = 2$).

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant la conjecture. Alors, pour pouvoir définir $f \circ \ldots \circ f$ (avec $n+1$ fois le symbole f) il faut que $x \in E_n$ et que $f(x) \neq -\frac{1}{n}$

Or, $f(x) = -\frac{1}{n} \iff \frac{x}{x+1} = -\frac{1}{n} \iff nx = -(x+1) \iff x = -\frac{1}{n+1}$. Ainsi, $f \circ \ldots \circ f$ est définie sur $E_{n+1} = E_n \cup \{-\frac{1}{n+1}\}$.

Par ailleurs, pour $x \in E_{n+1}$, on calcule :

$$f\left(\frac{x}{nx+1}\right) = \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x}{nx+1}+1} = \frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x+nx+1}{nx+1}} = \frac{x}{(n+1)x+1}$$

et la récurrence est établie.