Intro 2

CHAPITRE 2 : VOCABULAIRE SUR LES FONCTIONS

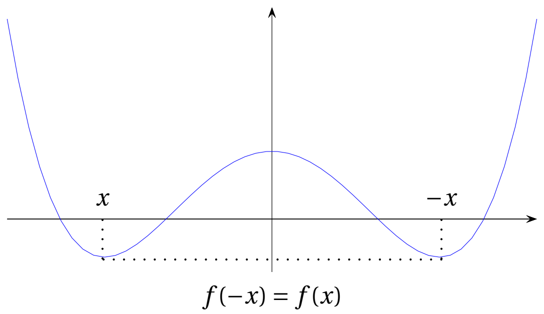
I. RAPPELS ET QUANTIFICATION

1. Parité

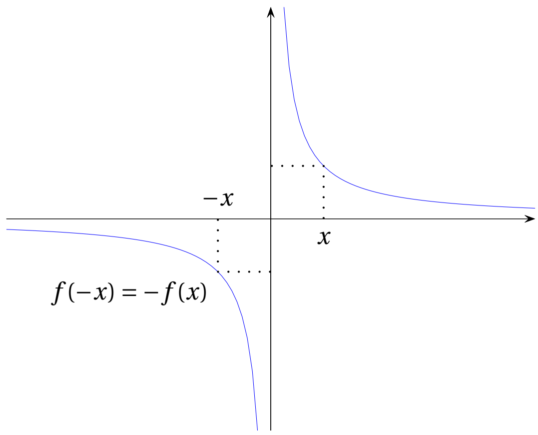
Définition 1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est :

- **paire** si sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
- **impaire** si sa courbe est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0;0)$, c'est-à-dire l'origine du repère.

Fonction paire



Fonction impaire



Propriété 2. Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est paire si et seulement si pour tout réel x, $f(x)$ et $f(-x)$ sont des nombres égaux. On note :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$$

De la même manière, f est impaire si et seulement si pour tout réel x, $f(x)$ et $f(-x)$ sont opposés. On note :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$$

Fiche sur les quantificateurs

Exemples. Avec les fonctions monômes : $x \mapsto x, x \mapsto x^2, x \mapsto x^3, x \mapsto x^3$, etc.

Démonstration. Retenir la méthode pour montrer une propriété qui commence par « $\forall x, \dots$ »

2. Fonctions périodiques, fonctions bornées

Dans tout ce qui suit, sauf contre-indication, f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On écrit : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Définition 3. Soit T un réel strictement positif. On dit que f est **périodique de période** T si pour tout réel x, $f(x) = f(x+T)$

Exercice. Montrer **par récurrence** que si f est périodique de période T, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x + nT) = f(x)$$

Définition 4 (Fonction périodique)**.** On dit que f est **périodique** si f est périodique de période un certain réel T strictement positif :

$$\exists T > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$$

♣ *Remarque.* C'est notre première définition qui utilise le symbole $\exists$. La période d'une fonction **n'est pas unique** : si f est T-périodique, f est aussi $2T$-périodique.

Exemples. Nos fonctions périodiques préférées : sin et cos (on en reparlera dans le chapitre dédié à la trigonométrie)

Définition 5 (Fonction bornée)**.** On dit que f est

- **majorée** si il existe un réel M tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$
- **minorée** si il existe un réel m tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant m$
- **bornée** si f est majorée et minorée :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m \leqslant f(x) \leqslant M$$

♣ *Remarque.* Encore une fois, m et M ne sont pas uniques. Pourquoi?

Exemples. Les fonctions sin et cos sont aussi de bons exemples de fonctions bornées :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \text{ et } -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$$

3. Sens de variation

Définition 6. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est

- **croissante** si f *respecte l'ordre*, i.e. pour tous x, y réels, (x, y) et $(f(x), f(y))$ sont ordonnés de la même manière ou encore :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$$
- **décroissante** si f inverse l'ordre, i.e. :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$$
- **monotone** si f est croissante ou décroissante.

♣ *Exercice.* Expliquer pourquoi f monotone n'est pas la même chose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leqslant y \Rightarrow \big(f(x) \leqslant f(y) \text{ ou } f(x) \geqslant f(y)\big)$$

Définition 7 (Monotonie stricte.)**.** On dit que f est **strictement** croissante si : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leqslant y \Rightarrow f(x) < f(y)$. On dit que f est **strictement** décroissante si :$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leqslant y \Rightarrow f(x) > f(y)$

💡 Fiche sur l'implication logique

Exercice. Écrire de manière quantifiée : f **n'est pas croissante.**

II. FONCTIONS INJECTIVES, SURJECTIVES, BIJECTIVES

1. Définitions

On se donne un intervalle I et une fonction à valeurs de I dans une sous partie F de $\mathbb{R}$. On note : $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

Définition 8. On dit que f est **injective** si aucun élément de J n'a deux antécédents différents par la fonction f dans l'ensemble I, c'est-à-dire que f envoie des réels différents sur des valeurs différentes. Formellement :

$$\forall x \in I, \forall x' \in I, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Méthode : montrer qu'une application est injective.
On commence par « soient x et x' dans I. Supposons que $f(x) = f(x')$ » et on aboutit par implications successives à « alors $x = x'$ »

Exemple. Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x+1}{2} \end{array}$ est injective.

Exercice. Écrire, de manière quantifiée, « f n'est pas injective »

Exercice. Montrer que la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas injective.

Définition 9. On dit que f est **surjective** si tout élément de J a au moins un antécédent par la fonction f dans l'ensemble I. Formellement :

$$\forall y \in J, \exists x \in I, y = f(x)$$

Remarque. On peut voir la surjectivité comme l'idée que les éléments de J sont « fabriqués » par la fonction f. Ça permet d'écrire tout élément de J sous la forme $f(x)$.
La surjectivité dépend fortement de l'ensemble qu'on a choisi comme espace d'arrivée.

Exercice. Les fonctions $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ sont-elles surjectives ?

Définition 10. On dit que f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.

2. Exemples de tableaux de variations

À l'aide des tableaux de variation suivantes, dire si les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont injectives, surjectives, bijectives, ni injectives ni surjectives, ou si on ne peut pas conclure.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3. Propriétés de composition

Définition 11. Soient f, g des fonctions. Lorsque c'est possible, on définit l'application $g \circ f$ par : $x \mapsto g(f(x))$

♡ **Exemple.** Soient $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & 1+x^2 \end{array}$ et $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$. $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies et :

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, (f \circ g)(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, (g \circ f)(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice. Soient f, g des fonctions telles que $f \circ g$ soit bien définie. Montrer que si f est décroissante et g décroissante, alors $f \circ g$ est croissante.

Propriété 12. Soient E, F, G des ensembles et $f: E \longrightarrow F, g: F \longrightarrow G$ des applications.

1. Si f, g injectives alors $g \circ f$ est injective
2. Si f, g surjectives alors $g \circ f$ est surjective

Démonstration.

Définition 13 (Fonction identité)**.** On appelle **identité** la fonction $id: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

Remarque. Pour n'importe quel ensemble E, on peut définir une application identité relative à E : $id_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$, on le reverra plus tard.

Propriété 14. Soit f une fonction de I dans J. f est bijective si et seulement si il existe une fonction appelée **réciproque** de f, bijective de J dans I, notée f^{-1}, telle que : $f \circ f^{-1} = id_J$ et $f^{-1} \circ f = id_I$

Remarque. Propriété admise. L'idée est que f^{-1} est construite en associant à tout élément de J son unique antécédent de I.

Propriété 15. f et g sont réciproques l'une de l'autre (i.e. $g = f^{-1}$) ssi :

$$\forall x \in I, \forall y \in J, y = f(x) \iff x = g(y)$$

Démonstration.

Méthode pour montrer qu'une application est bijective de I dans J : « Soit $y \in J$, soit $x \in I$.
$y = f(x) \iff \ldots \iff x = ...$
Ainsi, f est bijective et sa réciproque est : $f^{-1} : y \mapsto ...$ »

Exemple. Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2(\ln(x) - 1) \end{array}$ est bijective et trouver sa réciproque.