CHAPITRE 3 : ENSEMBLES & APPLICATIONS

Intro 3

I. PETITE THÉORIE DES ENSEMBLES

1. Définitions

Définition 1. Un ensemble E est une collection d'objets (nombres, couples de nombres, points, fonctions, autres ensembles, ...). Pour un objet x, on note $x \in E$ la proposition « x appartient à E » et $x \notin E$ sa négation.

Exemples.

- On appelle **singletons** les ensembles à un élément : par exemple $\{2\}$ est un singleton. On différencie le singleton de l'élément qu'il contient : $2 \in \{2\}$
- Ensembles de nombres $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$($\mathbb{C}$ pour les expert·e·s). $-3 \in \mathbb{Z}$; $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$; $\dfrac{5}{11} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $[|1;n|]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n

Définition 2 (Ensemble vide)**.** Il existe un ensemble noté $\varnothing$ qui ne contient aucun élément

Définition 3 (Inclusion)**.** On dit qu'un ensemble E est **inclus dans** un ensemble F, noté $E \subset F$, si :

$$\forall x \in E, x \in F$$

Exercice. Quelle est la négation de $E \subset F$? (notée en général $E \not\subset F$)

Exemples.

- $\{1;3;5\} \subset \{1;3;4;5;7\} \subset \mathbb{N}$
- $\{3;5\} \not\subset \{1;3\}$
- $\forall n, m \in \mathbb{N}, n \leqslant m \Rightarrow [|1;n|] \subset [|1;m|]$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

> **Méthode :** montrer une inclusion d'ensembles $E \subset F$.
> « Soit $x \in E$. Montrons $x \in F$: ... »

Exercice. Montrer que $\{4k+1 | k \in \mathbb{N}\} \subset \{2j+1 | j \in \mathbb{N}\}$

Définition 4 (Égalité d'ensembles)**.** Deux ensembles E et F sont dit égaux (on note $E = F$) si $E \subset F$ et $F \subset E$

Remarque. On retiendra le lien entre inclusion et implication, et entre égalité d'ensembles et équivalence de propositions logiques ($x \in E \Leftrightarrow x \in F$). De la même manière qu'il existe un raisonnement par double implication, on montre les égalités d'ensembles par double inclusion.

> **Méthode** : montrer une égalité d'ensembles $E = F$ par double inclusion.
> « $\boxed{\subset}$ Soit $x \in E$. Montrons $x \in F$: ...
> $\boxed{\supset}$ Soit $x \in F$. Montrons $x \in E$: ... »

♣ *Exercice.* Montrer : $\mathbb{R}_+ = \{x^2 | x \in \mathbb{R}\}$

Remarque. Il n'y a pas de notion d'ordre dans l'écriture des éléments d'un ensemble : $\{1;3\} = \{3;1\}$. Pas de « doublon » non plus.

2. Parties d'un ensemble

Définition 5.

- Si $F \subset E$, on dit que F est un **sous-ensemble** ou une **partie** de E
- On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E

Exercice. Déterminer $\mathscr{P}(\{0;1;2\})$.
Soit $E = \{0\}$. Déterminer $\mathscr{P}(E)$, puis $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$.

Propriété 6 (Ensemble défini par compréhension - admis)**.** Étant donné une proposition $P(\cdot)$ définie sur E, on peut définir $F = \{x \in E | P(x)\}$ l'ensemble des x de E tels que $P(x)$ soit vérifié.

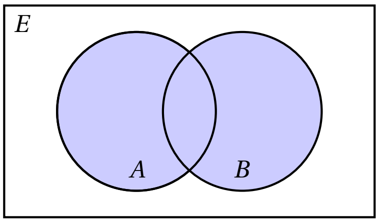
Remarque. Dans cette écriture, P agit comme un « filtre » : seuls les éléments qui passent le test de P sont admis dans F

Exemples.

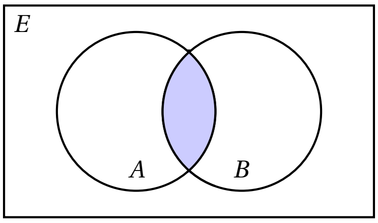
- $2\mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\}$
- $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} | p \text{ est premier}\}$
- $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 0\}$

Définition 7 (Opérations)**.** Dans ce qui suit, A et B sont des parties d'un ensemble E. On définit :

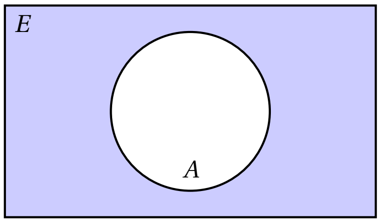
- l'union : $A \cup B = \{x \in E, x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- l'intersection : $A \cap B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\}$
- le complémentaire $\overline{A}$ de A dans E par : $\overline{A} = \{x \in E, x \notin A\}$. En cas d'ambiguïté sur l'ensemble E, on notera $\complement_E A$ (recommandation du programme) ou $E \backslash A$ (comme dans la notation « $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ »)



$A \cup B$



$A \cap B$



$\overline{A}$

Propriété 8. Dans ce qui suit, E est un ensemble

- $\forall A \in \mathscr{P}(E), A \subset A$ et $\varnothing \subset A$
- $\forall A, B \in \mathscr{P}(E), A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
- $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E), A \subset B$ et $B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- (distributivité) $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

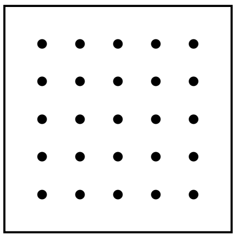
Démonstration. Dernière propriété par **disjonction de cas**. Savoir aussi visualiser sur un dessin

3. Ensembles produits

Définition 9 (Produit cartésien)**.** Soient A, B deux ensembles (cette fois pas supposés parties d'un même ensemble). On définit :

$$A \times B = \{(a, b) \quad | \quad a \in A, b \in B\}$$

Exemple. L'ensemble $A = [|1;5|] \times [|1;5|]$ est l'ensemble des paires (n, m) d'entiers inférieurs à 5 : par exemple $(3;2) \in A, (-1;7) \notin A$


A

Notation. Pour un ensemble E, on notera E^2 pour $E \times E$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $E^n := \underbrace{E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}}$

Exemple. $\mathbb{R}^2$ est représenté graphiquement par le plan cartésien, $\mathbb{R}^3$ l'espace (qui peuvent être vus selon le contexte comme ensembles de points ou de vecteurs)

Remarque. C'est du fait de cette notation qu'on peut noter de manière indifférenciée : $\forall a \in E, \forall b \in E, \ldots$ ou : $\forall (a, b) \in E^2, \ldots$

II. APPLICATIONS

1. Définition

Définition 10 (Application - généralisation de la notion de fonction)**.** Soient E, F des ensembles quelconques. On dira que f est une **application** de E vers F si on peut lui associer un ensemble $A \subset E \times F$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \exists! y \in F, (x, y) \in A$$

Pour chaque $x \in E$, on notera alors $f(x)$ cette unique valeur de y, appelée image de x par f. On dit que x est **un** antécédent de y. A est le **graphe** de l'application. E est **l'ensemble de définition** de f et F **l'ensemble d'arrivée**.

Remarque. Le fait de voir l'application au travers de son graphe ne remplace pas l'intuition que l'on a déjà : à chaque variable on associe une unique image. On utilisera le mot ńapplicationż pour généraliser le mot ńfonctionż à des ensembles de départ et d'arrivée qui ne sont pas nécessairement constitués de nombres réels.
Toujours dire *l'*image et *un* antécédent.

Exemples.

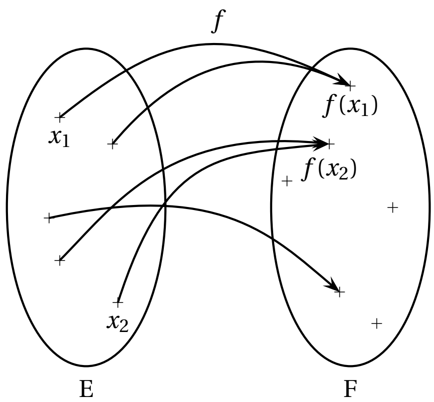
- Si E est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$, on retrouve la notion de fonction. Par exemple :

$$\begin{array}{rccc} f_1 : &]0;1[& \longrightarrow &]1;+\infty[\\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

  Par f_1, l'image de $\frac{1}{2}$ est ....
- Si $E = \mathbb{N}$ et $F \subset \mathbb{R}$, une application de E dans F est une suite. Par exemple :

$$\begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & \sqrt{n} \end{array}$$

  Par f_2, un antécédent de 3 est .... Est-ce le seul ? Que peut-on dire des antécédents de $\frac{1}{2}$?
- Les transformations géométriques sont des applications du plan. Les applications linéaires (voir plus tard dans l'année). Application « initiale ». **Application « identité »** d'un ensemble E.
- Exemple patatoïde



2. Bijections

♡ **Définition 11** (Rappel)**.** Soient E, F deux ensembles et f une application de E vers F

- f est dite **injective** si
$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$
- f est dite **surjective** si
$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

Exercice. Les exemples f_1 et f_2 de la section précédente sont-elles injectives ? surjectives ? et l'exemple patatoïde ?

Définition 12 (Ensemble image)**.** Soit f définie de E dans F. On appelle **ensemble image** de E par f l'ensemble :

$$f(E) = \{y \in F | \exists x \in E, y = f(x)\}$$

Remarque (Une autre façon de définir un ensemble)**.** On peut aussi noter $f(A)$ sous la forme : $\{f(x) | x \in E\}$

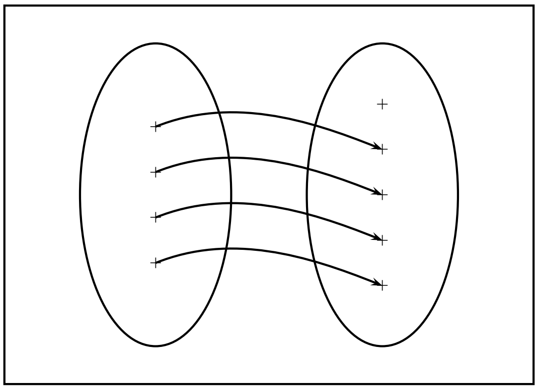
Exemples.

- $\{y \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathbb{R}, y = x^2\} = \{x^2 | x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+$
- $\{n \in \mathbb{Z} | \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\} = \{2k | k \in \mathbb{Z}\}$
- $\{y \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathbb{R}, y = 2x - 1\} = \{..............\}$
- $\{k^2 | k \in \mathbb{N}\} = \{..........................\}$

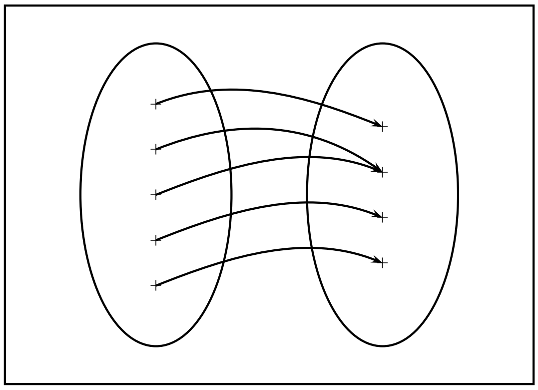
Propriété 13. $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & f(E) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est bien définie et toujours surjective

Démonstration. Par construction

Remarque. La notation $\tilde{f}$ permet de transmettre l'idée que $\tilde{f}$ est « presque » l'application f (sans l'être mieux tout à fait) mieux que si on l'avait simplement notée g



Application injective *(mais pas surjective)*



Application surjective *(mais pas injective)*

Remarque (Reformulations). Chaque élément de F a **au moins** un antécédent par une application f surjective, et **au plus** un antécédent par une application f injective.

III. Le cas des ensembles finis

1. Cardinal

Définition 14 (Ensemble fini)**.** On dit qu'un ensemble E est fini si il existe $n \in \mathbb{N}$ et $f : [|1; n|] \longrightarrow E$ bijective.

Propriété 15 (Unicité du cardinal, admise)**.** Si E est fini, alors ce n est unique, et on l'appelle cardinal de E, noté $|E|$ ou card(E)

Exemple. Un ensemble de cardinal 4 : $\{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit\}$. Intuition de ce que signifie la bijection de $[|1; n|]$ dans E

Propriété 16 (Admise - intuitive)**.** Soit E un ensemble fini et $A \subset E$. Alors, $|A| \leqslant |E|$

Propriété 17. Soit E un ensemble fini, $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathscr{P}(E)$ et $f : A \longrightarrow B$. Si f est injective, alors $|A| \leqslant |B|$. Si f est surjective, alors $|A| \geqslant |B|$

Démonstration. Pour l'injectivité seulement. C'est une preuve technique, qui ne doit pas être connue par cœur. Il faut essayer d'en comprendre l'intuition. Idée de preuve avec des dessins.

♡ **Propriété 18.**

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Démonstration. Idée de preuve avec des dessins.

Propriété 19 (Corollaire)**.** Si $f : A \to B$ est bijective, alors $|A| = |B|$

Propriété 20. Soient deux ensembles E, F.

$$|E \times F| = |E| \times |F|$$

Démonstration. Idée de preuve avec des dessins.

2. Dénombrements classiques

Propriété 21. Si E est un ensemble de cardinal n, alors $\mathscr{P}(E)$ est fini et $|\mathscr{P}(E)| = 2^n$

Démonstration.

Définition 22 (Coefficients binômiaux, approche combinatoire)**.** Soit E un ensemble à n éléments et $k \in \mathbb{N}$. On appelle **coefficient binômial** le nombre $\binom{n}{k}$ de parties de E à k éléments.

Exemples. Cas particuliers : $\binom{n}{0}, \binom{n}{n}, \binom{n}{1}$, si n est un entier naturel.

Remarque. Une partie de E a moins d'éléments que E. Pour tous k, n entiers : $k > n \Rightarrow \binom{n}{k} = 0$. On restreint alors parfois la définition à $k \in [|0, n|]$

Propriété 23 (Relation de récurrence)**.**

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Disjonction de cas.

Remarque. On retrouve donc les coefficients binômiaux du premier chapitre. En particulier, on rappelle : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

♡ *Exercice* (Applications, bijections).

1. Combien y a-t-il d'applications de l'ensemble $[|1; m|]$ dans l'ensemble $[|1; n|]$?
2. Si $m \neq n$, combien y a-t-il de bijections de $[|1; m|]$ vers $[|1; n|]$?
3. Et si $m = n$: combien y a-t-il de bijections de l'ensemble $[|1; n|]$ dans lui-même ?
4. Dans une course cycliste à 10 participant·es, combien y a-t-il d'ordres d'arrivée possibles ?