

Implications et équivalences

Négations de propositions logiques

Définitions

Soient P et Q deux **propositions logiques**, i.e. deux phrases mathématiques qui peuvent être vraies ou fausses. On dit que P implique Q , et on note $P \Rightarrow Q$, si **quand** P est vraie, Q aussi. $P \Rightarrow Q$ ne dit rien sur la valeur de Q quand P est fausse.

♠ On peut résumer ces définitions par des *tables de vérité*.

Lorsque $P \Rightarrow Q$, on dit que P est une **condition suffisante** pour que Q soit vraie, et que Q est une **condition nécessaire** pour que P soit vraie.

Remarque Par exemple « si x est un nombre réel tel que $x^2 = -1$, alors x est plus grand que $x + 1$ » est une implication vraie, parce que la condition est toujours fausse.

Méthode pour montrer une implication $P \Rightarrow Q$: «Supposons (P). Alors ... On en déduit (Q)»

Propriété $P \Rightarrow Q$ est vraie si et seulement si $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$. La proposition « $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$ » s'appelle **contraposée** de $P \Rightarrow Q$.

Méthode : raisonnement par contraposée, pour montrer une implication.

Exemple Montrer que pour tous nombres réels x et y , si $x \neq y$, alors $(x + 1)(y - 1) \neq (y + 1)(x - 1)$

Équivalence et double implication

Deux propositions P et Q sont **équivalentes** si elles sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses. On le note $P \Leftrightarrow Q$

Propriété $P \Leftrightarrow Q$ si et seulement si : $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$

Remarque On dit que P est une **condition nécessaire et suffisante** (parfois abrégée **CNS**) de Q

Méthode : montrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q$ par double implication.

\Rightarrow Supposons P . Alors ... On en déduit Q .

\Leftarrow Supposons Q . Alors ... On en déduit P .

Exemple Montrer par double implication que n est pair si et seulement si n^2 est pair.

Propriété Si P et Q sont des propositions logiques, la négation de P et Q est : **non** P **OU** **non** Q .

Si P et Q sont des propositions logiques, la négation de P ou Q est : **non** P **ET** **non** Q .

Négation d'une implication

La proposition $P \Rightarrow Q$ se réécrit : **non** Q ou P . On en déduit que la négation de $P \Rightarrow Q$ est :

P et **non** Q

Remarque Le «ou» mathématique n'est pas le «ou» de la langue française du quotidien. Exemple de la cantine.

Il faut absolument savoir écrire cette négation et en tout cas retenir que la négation de $P \Rightarrow Q$ **n'est pas une implication**.

Exercice Trouver des propositions P, Q (n'importe lesquelles !) telles que :

- $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$
- $P \Rightarrow Q$ mais pas $Q \Rightarrow P$
- $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont toutes les deux fausses.

Exercice Compléter par \Leftarrow, \Rightarrow ou \Leftrightarrow . Dans les phrases suivantes, x, y sont des réels, A, B, C, D des points du plan

- $x^2 = \frac{1}{16} \dots \dots \dots x = \frac{1}{4}$
- $x > 0$ et $y > 0 \dots \dots \dots xy > 0$
- $ABCD$ n'est pas un rectangle $\dots \dots \dots ABCD$ n'est pas un carré
- ABC est un triangle rectangle $\dots \dots \dots AB^2 = AC^2 + CB^2$

Exercice Soit f une fonction. Déterminer la négation des propositions suivantes :

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = y$ | 5. $\exists x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) \leq f(x_0)$ |
| 2. $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ | 6. $\forall x \in I, -x \in I$ et $f(-x) = f(x)$ |
| 3. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$ | 7. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$ |
| 4. $\forall x \in I, \forall y \in I, f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ | 8. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},$
$f(x) = y$ ou $f(x) = -y$ |