Quantificateurs universel et existentiel

On se donne un «prédicat» P, c'est-à-dire que pour tout élément x, $P(x)$ est une **proposition logique** qui est vraie ou fausse.

Exemples

- $P_1(n)$: *n est pair*
- $P_2(x) : x > 0$
- $P_3(x,y) : x^2 + y^2 = 1$

Quantificateur existentiel

Le quantificateur existentiel, lu «il existe», est représenté par le symbole $\exists$. La propriété $P : \exists x \in E, P(x)$ est vraie si au moins un élément x rend $P(x)$ vraie. Dans cette phrase, la virgule se lit «tel(le) que»

Exemples *La proposition $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$ est vraie car $x = 2$ convient. Cette valeur de x est-elle la seule qui convienne ?*

Remarque *Pour dire qu'il existe **un unique** élément qui rend $P(x)$ vraie, il existe le quantificateur «il existe un unique», noté $\exists!$*

Quantificateur universel

Le quantificateur universel, lu «quel que soit» ou «pour tout», est représenté par le symbole $\forall$. La proposition $P : \ \forall x \in E, P(x)$ est vraie si n'importe quel x rend $P(x)$ vraie

Exemple *Écrire avec des quantificateurs la proposition : le produit de 0 et de n'importe quel nombre réel est nul.*

Remarque *Les symboles $\exists, \forall$ s'utilisent dans un contexte formel, en début de ligne uniquement et **pas comme raccourci d'écriture.** Ils sont toujours suivis de l'ensemble auquel appartient la variable : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$, etc. La variable qui suit $\forall$ est dite **muette** : c'est rigoureusement pareil d'écrire : $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 > x$ ou : $\forall y \in \mathbb{R}, y + 1 > y$*

Méthode : démontrer une propriété universelle.
Pour montrer une propriété de la forme : «$\forall x \in \mathbb{R}, \ldots$», on commence la rédaction par : «**Soit** $x \in \mathbb{R}$. ...»

Exemple *Montrer :* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, 2x + 5 = 2y + 5 \Rightarrow x = y$

Remarque *Pour montrer il existe x tel que (...), c'est à la fois plus simple et plus compliqué : **il suffit** de trouver **un** x qui convient. Il faut alors faire preuve de créativité pour en trouver un !*

Exemple *Montrer :* $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y \leq x^2$

Enchaînements et négation

Propriété *Pour tout prédicat $P(x)$ défini sur E,*

- *la négation de $\exists x \in E, P(x)$ est* ....
- *la négation de $\forall x \in E, P(x)$ est* ....

Remarque *L'ordre des quantificateurs dans une phrase est important.*

Exemple *Comparer les propositions*

$$P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1$$

$$P_2 : \exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \leq x < n + 1$$

Remarque *En revanche, deux quantificateurs existentiels ou deux quantificateurs universels à la suite peuvent être intervertis.*

Exercice (Traduire en quantificateurs - nombres réels ou entiers) *On notera dans la suite n un entier relatif et x un réel quelconque. Traduire en propositions quantifiées les phrases suivantes :*

1. *x est un nombre rationnel*
2. *n est un nombre premier*
3. *n est plus petit que tous les nombres réels au carré*
4. *x est compris entre deux entiers consécutifs*

Exercice (Traduire en quantificateurs - suites) *On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Traduire en propositions quantifiées les phrases suivantes :*

1. *(u_n) est croissante*
2. *(u_n) est strictement croissante à partir d'un certain rang*
3. *(u_n) est constante*

Exercice *Pour les 7 phrases des exercices précédents, écrire la négation en quantificateurs.*