Feuille d'exercices n°3

Exercice 15 (Lemme des tiroirs)**.**

1. En raisonnant par contraposition, justifier la phrase : «Si $n+1$ paires de chaussettes sont rangées dans n tiroirs, alors il existe au moins un tiroir qui contient au moins deux paires»
   Par contraposée : si chaque tiroir contient au plus une paire de chaussettes, alors il y a au plus n chaussettes en tout. C'est une version moins formelle de : si $f : E \to F$ est injective avec E et F finis, alors $|E| \leq |F|$. Ou ici : si $|E| > |F|$, alors f n'est pas injective. Ici, l'application serait : $chaussette \mapsto$ *tiroir ou est rangee chaussette*. Il y a plus de chaussettes que de tiroirs, donc l'application n'est pas injective : un *tiroir* a au moins deux antécédents.
2. Soit $\{x_1, \ldots, x_{10}\}$ une partie de $[|1; 100|]$, c'est-à-dire que $x_1, \ldots, x_{10}$ sont des nombres entiers distincts entre 1 et 100. Montrer qu'on peut en extraire deux sous-ensembles (disjoints et non vides) ayant la même somme.
   Exemple : si on prend $2, 3, 11, 31, 45, 50, 71, 87, 90, 99$ comme valeurs de $x_1, \ldots, x_{10}$, alors on a par exemple : $2+3+45 = 50$ et donc $\{2; 3; 45\}$ et $\{50\}$ conviennent.
   Il y a $2^{10} = 1024$ parties de $\{x_1, \ldots, x_{10}\}$ d'après le cours, et les sommes sont des entiers entre 1 et $99+98+97+\ldots+90 < 1000$. Il y a donc moins de 1000 sommes possibles et 1024 parties possibles. D'après le théorème des tiroirs, il y a au moins deux parties de $\{x_1, \ldots, x_{10}\}$ qui ont la même somme. On peut préciser : les deux ensembles peuvent ne pas être disjoints, mais en supposant que A et B ont la même somme, alors il en va de même pour $A \backslash (A \cap B)$ et $B \backslash (A \cap B)$. Par ailleurs, ces ensembles ne peuvent pas être tous les deux vides car $A \neq B$ et aucun des deux n'est vide puisqu'ils n'ont pas la même somme.

Exercice 16 (Des propriétés des coefficients binômiaux)**.**

1. Montrer : $\forall k, p, n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$. Interpréter cette formule de manière combinatoire en dénombrant les façons de choisir dans un ensemble à n éléments un sous-ensemble A à p éléments et un sous-ensemble B de A à k éléments.
   Montrons-le d'abord algébriquement : soient $k, p, n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}
\binom{n}{p}\binom{p}{k} &= \frac{n!p!}{p!(n-p)!k!(p-k)!} \\
&= \frac{n!}{(n-p)!k!(p-k)!} \\
&= \frac{n!(n-k)!}{(n-k)!k!(n-p)!(p-k)!} \text{ en multipliant numérateur et dénominateur par } (n-k)! \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(p-k)!((n-k)-(p-k))!} \\
&= \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{p-k}
\end{aligned}$$
   Maintenant pour l'interprétation combinatoire. Soit E un ensemble à n éléments. On cherche à dénombrer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $B \subset A$ et $|B| = k, |A| = p$. On peut dénombrer de deux manières :
   - Choisissons d'abord les éléments de B. Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités. Pour chacune de ces options, on peut encore choisir $p-k$ éléments parmi les $n-k$ éléments de $\overline{B}$ pour composer l'ensemble A, soit $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ choix au total.
   - Choisissons d'abord les éléments de A. Il y a $\binom{n}{p}$ possibilités. Pour chacune de ces options, on peut choisir k éléments parmi les p éléments de A. Il y a donc $\binom{n}{p}\binom{p}{k}$ choix au total.

   On en conclut : $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$
2. Pour quelles valeurs de $n, p, q \in \mathbb{N}$ a-t-on $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$? et $\binom{n}{p} < \binom{n}{p+1}$? Que peut-on en déduire sur la structure d'une ligne du triangle de Pascal ?

On commence par la deuxième inéquation :

$$\binom{n}{p} < \binom{n}{p+1} \iff \frac{n!}{p!(n-p)!} < \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}$$
$$\iff p!(n-p)! > (p+1)!(n-p-1)!$$
$$\iff n-p > p+1$$
$$\iff p < \frac{n-1}{2}$$

On en déduit que la suite $\left(\binom{n}{p}\right)_{p\in[|0;n|]}$ est croissante de 0 à $\frac{n-1}{2}$ et décroissante ensuite. Il y a donc au plus deux possibilités pour que $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$: $p = q$ ou bien $p < \frac{n-1}{2}$ et $q \leq \frac{n-1}{2}$ ou inversement. Or, pour tout $k \in [|0;n|]$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et il reste donc deux options : $p = q$ ou $p = n - q$.

Exercice 17. En utilisant la formule explicite des coefficients binômiaux, montrer que pour tout n entier, tout produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$

Exemple : tout produit de 4 nombres consécutifs est divisible par 24. On peut le vérifier sur l'exemple $3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 21 \times 24$

Prenons n entiers consécutifs : si k est le plus petit d'entre eux, ces n entiers sont $k, k+1, k+2, \dots, k+n-1$. Alors $\frac{k(k+1)(k+2)\dots(k+n-1)}{n!} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!} = \binom{n+k-1}{n} \in \mathbb{N}$. Ainsi, le produit de n entiers consécutifs est toujours divisible par $n!$

♠ **Exercice 18** (Abstrait)**.** Soit E un ensemble (pas nécessairement fini). Montrer **par l'absurde** qu'il n'existe pas d'application surjective $f : E \to \mathcal{P}(E)$.

Indication : supposer par l'absurde qu'une telle application f existe et considérer l'ensemble $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$

Supposons par l'absurde qu'il existe un ensemble E et $f : E \to \mathcal{P}(E)$ surjective. Posons $A = \{x \in E, x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(E)$. Puisque f est surjective, A admet un antécédent $x_0 \in E$. Alors :

— Si $x_0 \in A, x_0 \notin f(x_0)$, i.e. $x_0 \notin A$, ce qui est absurde.

— Si $x_0 \notin A$, alors $x_0 \in f(x_0)$, i.e. $x_0 \in A$, ce qui est absurde.

On en déduit qu'il n'existe pas de tel couple (E, f).

Remarque : pour E un ensemble fini, on peut raisonner plus simplement avec les cardinaux : si $|E| = n$, alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^n > n$ (se montre par récurrence immédiate) et donc il n'y a pas d'application surjective de E dans $\mathcal{P}(E)$ (propriété du cours : si une application est surjective, son ensemble de départ est plus grand que son ensemble d'arrivée, en nombre d'éléments).