Devoir Maison n°2

Exercice 1 - Quantificateurs

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On considère les quatre énoncés mathématiques suivants :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$
2. $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ et $g(x) = 0$
4. $(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$

Montrer que les propositions 1 et 2 ne sont pas équivalentes, puis que les propositions 3 et 4 ne sont pas équivalentes.
Il n'y a pas **une** bonne réponse : f et g peuvent être beaucoup de fonctions différentes. Pour le cas des phrases 1 et 2, la propriété 2 signifie qu'une des deux fonctions est la fonction nulle. C'est plus fort que la phrase 1, qui dit qu'une des deux fonctions est nulle pour chaque réel, mais pas forcément toujours la même. On peut choisir comme couple de fonctions (f, g) qui vérifient la propriété 1 mais pas la propriété 2 :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour le cas des phrases 3 et 4, la phrase 3 signifie que f et g ont un point commun d'annulation. C'est plus fort que la phrase 4 qui dit que chaque fonction a un point d'annulation, pas forcément le même pour les deux fonctions. On peut choisir comme couple de fonctions (f, g) qui vérifient la propriété 4 mais pas la propriété 3 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = x + 1$$

Chacune des fonctions s'annule, g en $x = -1$ et f en $x = 0$, mais il n'existe pas un unique réel x tel que $f(x) = g(x) = 0$

Pour chacun des cas, on proposera un contre exemple sous la forme d'un couple f, g de fonctions. On pourra les définir par une expression algébrique ou proposer une représentation graphique. Expliquez sur votre copie la construction de vos contre-exemples (comment les trouver ? qu'est-ce que ces fonctions ont de spécial ?)

Exercice 2 - Applications bijectives

1. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   (a) f est injective
   (b) Pour toutes parties A, B de E,
   $$A \cap B = \varnothing \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \varnothing$$

   Raisonnons par double implication.
   $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f injective de E vers F. Soient A, B des parties de E. Supposons $A \cap B = \varnothing$ et montrons $f(A) \cap f(B) = \varnothing$. Supposons par l'absurde qu'il existe un $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors, il existe $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ tels que $y = f(x_1) = f(x_2)$. Puisque f est supposée injective, alors $x_1 = x_2$. Ainsi, $x_1 \in A$ par hypothèse et $x_1 \in B$ puisque $x_1 = x_2 \in B$. On en déduit : $x_1 \in A \cap B$, ce qui est une contradiction puisque $A \cap B = \varnothing$.
   Ainsi : $f(A) \cap f(B) = \varnothing$.
   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que pour toutes parties $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \varnothing$. Montrons que f est injective.
   Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons $x = x'$.
   Si par l'absurde, $x \neq x'$, alors $\{x\} \cap \{x'\} = \varnothing$. Ainsi, par hypothèse, $\{f(x)\} \cap \{f(x')\} = \varnothing$, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse $f(x) = f(x')$. *Remarque :* pour chacune des implications, on cherche à montrer une implication (f est injective se traduit par une implication). On a raisonné deux fois par l'absurde, mais on peut rédiger de manière plus efficace par contraposée. Pour garder une rédaction «preuve automatique» un peu plus directe, on fait ici le choix de garder une démonstration par l'absurde.
2. Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$ définie par $f(p, q) = 2^p(2q + 1)$. Montrer que f est bijective.
   Montrons que f est injective et que f est bijective.
   Injectivité : soient $(p, q), (p', q') \in \mathbb{N}^2$ tels que $2^p(2q+1) = 2^{p'}(2q'+1)$. Supposons (sans restriction de généralité) $p \geq p'$. Alors,
   $$2^{p-p'}(2q + 1) = 2q' + 1$$
   Le membre de droite est impair, donc le membre de gauche doit être impair. Or, si $p - p' > 0$, le membre de gauche est divisible par 2. On en déduit : $p - p' = 0$, i.e. $p = p'$. Ainsi, on peut simplifier par 2^p dans la première égalité et obtenir :
   $$2q + 1 = 2q' + 1$$

On obtient de manière élémentaire : $q = q'$. Ainsi, $p = p'$ et $q = q'$: $\boxed{f \text{ est injective.}}$

Remarque : l'expression «sans restriction de généralité» permet de ne pas traiter deux cas $p \geq p'$ et $p' \geq p$ qui sont rigoureusement équivalents (par symétrie des variables). C'est une manière de dire : quitte à inverser p et p', on note p le plus grand des deux entiers.

Surjectivité :

Remarque : je propose une démonstration très formelle, mais ici une explication claire peut suffire, à notre niveau.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $A = \{p \in \mathbb{N} | 2^p \text{ divise } n\}$. Puisque $n \neq 0$, A n'est pas vide car contient 0 ($2^0 = 1$ divise tous les entiers). Par ailleurs, A est **majoré** puisque les diviseurs de n sont plus petits que n. Ainsi, il y a un plus grand élément $p_0 \in A$. Notons alors $q_0 = \frac{\frac{n}{2^{p_0}} - 1}{2}$ et montrons que $f(p_0, q_0) = n$.

Déjà, par définition, $(2q_0 + 1)2^{p_0} = n$. Il suffit de vérifier que q_0 est bien un entier, c'est-à-dire que $\frac{n}{2^{p_0}} - 1$ est un entier pair. C'est bien un entier puisque par définition, $p_0 \in A$ et donc 2^{p_0} divise n. Par ailleurs, si 2^{p_0} est pair, alors 2^{p_0+1} divise n, ce qui est en contradiction avec le fait que p_0 soit le maximum de l'ensemble A.

On a trouvé un antécédent $(p_0, q_0) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f(p_0, q_0) = n$: f est surjective.