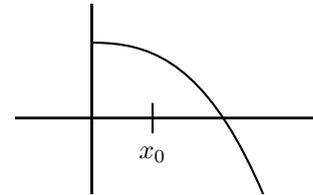


## Devoir Maison n°4 - Méthode de Newton et $\sqrt{2}$

### EXERCICE 1 - AUTOUR DE LA MÉTHODE DE NEWTON

**Consigne :** Pour résoudre numériquement l'équation  $f(x) = 0$ , on établit l'algorithme ci-dessous à gauche. L'appliquer (graphiquement) à la fonction  $f$  tracée à droite.

1. Choisir un réel  $x_0$  quelconque
2. Tracer la tangente  $T_0$  à la courbe de  $f$  au point  $M(x_0, f(x_0))$ .  $T_0$  coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse  $x_1$ .
3. Tracer la tangente  $T_1$  à la courbe de  $f$  au point  $M(x_1, f(x_1))$ ,  $T_1$  coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse  $x_2$
4. Recommencer plusieurs fois.



1. On admet que la tangente à la courbe de  $f$  à l'abscisse  $a$  a pour équation :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ . En déduire une expression de  $x_{n+1}$  en fonction de  $x_n$
2. On cherche à résoudre l'équation  $\cos(x) = x^3$ . On pose  $f : x \mapsto \cos(x) - x^3$ 
  - (a) Déterminer une expression de  $f'$ . En déduire les variations de  $f$  et vérifier que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution.
  - (b) Compléter le programme suivant pour qu'il calcule les premiers termes de la suite  $(x_n)$

```

from math import cos, sin
def f(y):
    return .....
def fprime(y):
    return .....
x = 0.5
n = 100
for k in range(n):
    x = .....
print(x)

```

- (c) Implémenter ce programme et donner une valeur approchée d'une solution de l'équation  $f(x) = 0$ . Trouve-t-on la même limite en changeant la valeur de  $x_0$ ?

### EXERCICE 2 - MÉTHODE DE NEWTON APPLIQUÉE À $\sqrt{2}$

On cherche maintenant à approximer  $\sqrt{2}$ , c'est-à-dire une racine de l'équation  $x^2 - 2 = 0$

1. En utilisant la première partie, justifier pourquoi la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{2}{u_n} \right)$$

est l'application de la méthode de Newton à ce problème.

2. **Une autre justification** Traçons un rectangle de côté 1 et d'aire 2. Notons  $x_1$  la moyenne de ses deux côtés. Traçons un rectangle de côté  $x_1$  et d'aire 2. Notons  $x_2$  la moyenne de ses deux côtés. Reconnençons plusieurs fois. Comment se calcule  $x_{n+1}$  à partir de  $x_n$ ? Pourquoi peut-on penser que  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sqrt{2}$ ?
3. **Étude de la convergence de  $(u_n)$** 
  - (a) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq \sqrt{2}$
  - (b) Montrer que  $(u_n)$  est décroissante à partir d'un certain rang.
  - (c) Montrer que  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite
  - (d) Écrire un programme Python qui permet de calculer les premiers termes et qui s'arrête lorsque  $|u_n^2 - 2|$  est inférieur à  $10^{-6}$