

Devoir Maison n°3 - Deux suites cousines

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 0, b_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases}$$

L'objectif est de déterminer le terme général des suites (a_n) et (b_n)

1. Écrire une fonction Python `suites(n)` prenant en argument un entier naturel n et renvoyant a_n et b_n
2. Calculer a_1, b_1, a_2, b_2 (et d'autres termes si vous voulez)
3. **Méthode 1.**
 - (a) Déterminer une relation de récurrence sur la suite (s_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = a_n + b_n$
 - (b) Déterminer une relation de récurrence sur la suite (t_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 2a_n - b_n$
 - (c) Déterminer grâce aux questions précédentes une expression explicite de s_n et de t_n pour tout n entier.
 - (d) En déduire le terme général de (a_n) et (b_n)
4. **Méthode 2.**
 - (a) Montrer que (a_n) est une suite linéaire d'ordre 2
 - (b) Grâce à un théorème du cours, en déduire le terme général de (a_n) , puis celui de (b_n)
5. **Une troisième suite.** Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$$

Recopier et exécuter le code Python suivant :

Remarque : il faut aussi intégrer le code Python de la première question !

```
for k in range(5):
    print(suites(k))
def u(n):
    u, v = 0, 1
    for k in range(n):
        print(u)
        u, v = v, v + 2*u
    u(10)
```

Qu'affiche l'exécution de ce programme ? En tirer une conjecture sur la suite (u_n) et son lien avec les suites (a_n) et (b_n) , puis démontrer cette conjecture.