Chapitre 4 : L'ensemble $\mathbb{R}$

Analyse 1

I. Intervalles

Définition 1. On appelle intervalle réel toute partie de $\mathbb{R}$ de l'un des types suivants (avec $a < b$) :

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
- $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$
- $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$
- $\mathbb{R}$
- $\varnothing$
- $\{a\} = [a,a]$

Les intervalles $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$, $\mathbb{R}$, $\varnothing$, $\{a\}$ sont dits **fermés**.
Les intervalles $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $\mathbb{R}$, $\varnothing$ sont dits **ouverts**.

Remarque. Contrairement aux portes, les intervalles ne sont pas « soit fermés soit ouverts » (ex : [-1 ;3[, $\mathbb{R}$, $\varnothing$)

♣ **Dessins :**

- $[0;1[$
- $]-\infty;3[$
- $[1;2]\cup[4;+\infty[$

Exemples. Notations :

- On note $\mathbb{R}^+$ l'ensemble $[0;+\infty[$, et $\mathbb{R}^-$ l'ensemble $]-\infty;0]$
- On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (qui n'est pas un intervalle) et de même $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$

Remarque (Une caractérisation uniforme). I est un intervalle si et seulement si :

$$\forall (a,b) \in I^2, [a;b] \subset I$$

Dessin :

Intuitivement : I est un intervalle si il n'a pas de « trous »

II. Propriété de la borne supérieure

1. Différentes bornes à différencier

Dans ce qui suit, $\mathscr{A}$ est une partie de $\mathbb{R}$

Définition 2.

- On dit que M est un majorant de $\mathscr{A}$ si : $\forall x \in \mathscr{A}, x \leqslant M$
- On dit que m est un minorant de $\mathscr{A}$ si : $\forall x \in \mathscr{A}, m \leqslant x$
- On dit que $\mathscr{A}$ est majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathscr{A}, x \leqslant M$
- On dit que $\mathscr{A}$ est minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathscr{A}, m \leqslant x$
- On dit que $\mathscr{A}$ est bornée si elle est majorée et minorée

Remarque. Un majorant est donc un élément « plus grand que tout le monde »dans $\mathscr{A}$. Remarque : il est supposé appartenir à $\mathbb{R}$ (quantificateur!) et pas à $\mathscr{A}$ nécessairement. Un majorant n'est pas unique!

Exemples.
- $[0;1[$ est bornée car 0 est un minorant, 1 ou 1748 sont des majorants
- $]-\infty;4]$ est majorée par 4, ou par 3π, mais pas minorée
- $\mathbb{Z}$ n'est ni majorée ni minorée

Exercice. Écrire la négation de « M majore $\mathscr{A}$ », de « $\mathscr{A}$ est majorée », de « $\mathscr{A}$ est bornée »avec des quantificateurs

Définition 3.
- On dit que M est **le** maximum de $\mathscr{A}$ si : $M \in \mathscr{A}$ et $\forall x \in \mathscr{A}, x \leqslant M$
- On dit que m est **le** minimum de $\mathscr{A}$ si : $m \in \mathscr{A}$ et $\forall x \in \mathscr{A}, m \leqslant x$

Remarque.
- Ici, M et m sont supposés appartenir à $\mathscr{A}$ et pas à $\mathbb{R}$
- Pour dire « le »maximum, il faut d'abord prouver que s'il existe, il est nécessairement unique

Méthode : démontrer que quelque chose est unique.
On prend deux éléments vérifiant la propriété (ici, deux maximums de $\mathscr{A}$) et on **montre** qu'ils sont **égaux**

Propriété 4 (Admise)**.** Dans $\mathbb{N}$, toute partie non vide admet un minimum. Toute partie majorée de $\mathbb{N}$ admet un maximum. Toute partie bornée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum et un maximum.

Remarque. C'est faux dans $\mathbb{R}$!

Exemple. Prenons $\mathscr{A} = [0;1[$. $\mathscr{A}$ est majorée et n'a pas de maximum. En particulier 1 n'est pas le maximum de $\mathscr{A}$, puisque $1 \notin \mathscr{A}$. On aimerait quand même dire qu'il a un rôle particulier ...

Définition 5 (La nouveauté!)**.**
- On dit que $\mathscr{A}$ admet une **borne supérieure** si $\mathscr{A}$ est majorée et que l'ensemble de ses majorants admet un minimum. On note alors $\sup(\mathscr{A})$ ce **plus petit majorant**
- On dit que $\mathscr{A}$ admet une **borne inférieure** si $\mathscr{A}$ est minorée et que l'ensemble de ses minorants admet un maximum. On note alors $\inf(\mathscr{A})$ ce **plus grand minorant**

♡ **Propriété 6** (Caractérisation de la borne supérieure)**.**

$$M = \sup(\mathscr{A}) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in \mathscr{A}, a \leqslant M \\ \forall y < M, \exists a \in \mathscr{A}, y < a \leqslant M \end{cases}$$

Démonstration. La première propriété traduit que M est un majorant de $\mathscr{A}$. La deuxième traduit que M est le plus petit des majorants, c'est-à-dire que tout nombre inférieur strictement à M n'est pas un majorant.

Remarque. Souvent, on choisira y de la forme $M - \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ moralement petit

♣ *Exercice.* En prenant $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, montrer que si $\mathscr{A}$ admet une borne supérieure,

$$\exists (a_n) \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}, a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sup(\mathscr{A})$$

c'est-à-dire : il existe une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ qui converge vers $\sup(\mathscr{A})$.

2. Théorème

♡ **Théorème 7** (Théorème de la borne supérieure - Admis)**.** Toute partie **majorée non vide** de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Remarque. Ce théorème est une propriété très particulière de $\mathbb{R}$: c'est par exemple complètement faux dans $\mathbb{Q}$ (avec une borne supérieure appartenant à $\mathbb{Q}$)

Exemple. L'ensemble $\mathscr{A} = \{x \in \mathbb{R} | x^2 < 2\}$ est non vide (pourquoi?) et majoré (pourquoi?) donc il admet une borne supérieure. Qu'a-t-on ainsi défini?

3. Conséquences

Propriété 8.

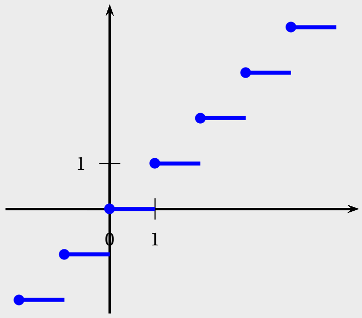
$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \exists n \in \mathbb{N}, na > b$$

Démonstration. Dans la feuille d'exercices.

Définition 9. On appelle **partie entière** d'un nombre x l'unique élément $n_x \in \mathbb{Z}$ vérifiant : $n_x \leqslant x < n_x + 1$
On note $n_x = \lfloor x \rfloor$

Remarque. Il faut d'abord montrer que cet élément unique existe!

Démonstration.
Unicité : Par l'absurde, supposer $n_1 < n_2$
Existence : En posant $\mathscr{A} = \{n \in \mathbb{N}, n \leqslant x\}$



Remarque. Avec la partie entière, on peut aussi définir les développements décimaux (troncatures) d'un réel x comme étant la suite $(10^{-n}\lfloor 10^n x \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$

Remarque. Beaucoup des propriétés que nous verrons sur les fonctions réelles utilisent, quelque part, cette propriété de la borne supérieure! (dans les futurs chapitres d'analyse : théorèmes de convergence monotone, des valeurs intermédiaires, théorème des accroissements finis en particulier) C'est souvent le cas des théorèmes d'analyse qui permettent de dire qu'un objet existe sans savoir le donner précisément.

III. Distance dans $\mathbb{R}$

1. Valeur absolue

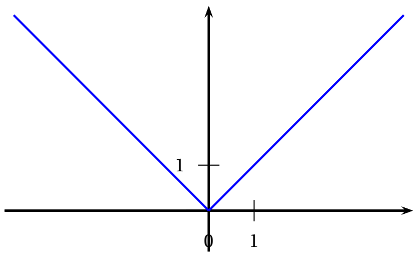
a. Définition

Définition 10. On définit la **valeur absolue** de x par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples.

- $|3,57| = 3,57$
- $\forall x \in \mathbb{R}, |-1-x^2| = 1+x^2$
- $\forall x \in \mathbb{R}, |4-x| = \begin{cases} 4-x & \text{si} x \leqslant 4 \\ x-4 & \text{sinon} \end{cases}$



Exercice. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto |2x-1|$ sur $[0;2]$

Fiche sur la disjonction de cas

Propriété 11.

- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geqslant 0$ et $|-x| = |x|$
- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \max(x, -x)$
  (et donc $|x| \geqslant x, |x| \geqslant -x$)
- $\forall x \in \mathbb{R}, |x|^2 = x^2$ et $|x| = \sqrt{x^2}$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leqslant a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a$ ou $-x \geqslant a$
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant |a| \Leftrightarrow x \geqslant a$ et $x \geqslant -a$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x||y|$

Démonstration. Partielle, le reste en TD. Démontrer des trucs sur la valeur absolue = penser disjonction de cas!

2. Inégalité triangulaire

♡ **Propriété 12** (Inégalité triangulaire)**.**

1. Pour tous réels x, y,
$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$
2. Généralisation :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}, |x_1 + \ldots + x_k| \leqslant |x_1| + \ldots + |x_k|$$

Démonstration.
1. En élevant au carré
2. Par récurrence (dans le TD)

♣

Exemple. Majorer : $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k)}{2^k}\right|$

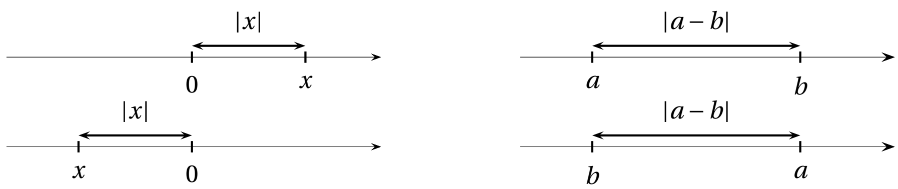
♡ **Propriété 13.** Pour tous réels x, y,
$$|x - y| \geqslant ||x| - |y||$$

Démonstration. En montrant $|x - y| \geqslant |x| - |y|$ et $|x - y| \geqslant |y| - |x|$ (cf. propriété 12)

3. Distance entre deux réels

Exercice. Donner un encadrement de x nécessaire et suffisant pour avoir $|x - 9| \leqslant 3$

Définition 14. Soient x, y deux réels. La **distance** de x à y est définie par $d(x, y) = |x - y|$



Exercice. Résoudre les (in)équations :

1. $|4x - 7| \leqslant 2$
2. $|2x + 1| \geqslant 3$
3. $|-3x + 4| + |x - 5| = 10$
4. $x - 1 \leqslant \sqrt{x + 2}$