Feuille d'exercices n°4

Valeur absolue

♡ **Exercice 1** (Équations/inéquations avec une valeur absolue). Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $|2x+3|=5$
2. $|2x-1|>3$
3. $|x^2-1|<1$
4. $|x-1|+|x+3|\leqslant 5$

♢ **Exercice 2** (Propriétés de la valeur absolue). Démontrer les propriétés du cours :

1. $\forall x\in\mathbb{R}, |x|\geqslant 0$ et $|-x|=|x|$
2. $\forall x\in\mathbb{R}, |x|=\sqrt{x^2}$
3. $\forall (a,x)\in\mathbb{R}^2, |x|\leqslant a \Leftrightarrow x\in[-a,a]$
4. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, |xy|=|x||y|$

Exercice 3. Donner une condition **nécessaire et suffisante** sur les réels a,b pour avoir

$$|a+b|=|a|+|b|$$

Exercice 4 (Inégalité triangulaire - généralisée à une somme de n termes).
Montrer que si $n\in\mathbb{N}$ et $x_1,\dots,x_n$ sont des réels, alors : $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right|\leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$

Majorants, minorants, bornes supérieures et inférieures

Exercice 5. Dans les deux cas suivants, déterminer, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures de E. En cas d'existence, on précisera si ce sont des extremums.

1. $E=\{\frac{1}{x}|x\in]1;3]\}$
2. $E=\{1-\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}^*\}$

Exercice 6 (Plus d'exemples). Lesquels de ces ensembles sont-ils majorés ? minorés ? admettent-ils une borne supérieure ou inférieure ? Donner les bornes si elles existent.

1. $\{x^2+x-1|x\in\mathbb{R}\}$
2. $\{x^2+x+1|x\in\mathbb{R}\}$
3. $\{x\in\mathbb{R}|x^2-2\leqslant 0\}$
4. $A=\{u_n|n\in\mathbb{N}\}$ où $u_n=2^n$ si n pair et 2^{-n} si n est impair

♠ **Exercice 7** (Propriété d'Archimède). Démontrer la propriété du cours, en utilisant la propriété de la borne supérieure.

♢ **Exercice 8** (Point fixe). Soit f une fonction croissante de $[0;1]$ dans $[0;1]$. En considérant $A=\{x\in[0;1]|f(x)\geqslant x\}$, montrer que f admet un **point fixe**, c'est-à-dire qu'il existe $m\in[0;1]$ vérifiant : $f(m)=m$

Divers

♢ **Exercice 9** (Intersection d'intervalles). Soit $A=\mathbb{R}^-$, $B=]-3;1[$, $C=[0;2]$

1. Que sont $A\cap B, A\cap C, B\cap C$?
2. En utilisant la caractérisation du cours, montrer que si I et J sont des intervalles, $I\cap J$ est toujours un intervalle.

♢ **Exercice 10** (Partie fractionnaire). On appelle partie fractionnaire d'un réel x, parfois notée $\{x\}$ le nombre $x-\lfloor x\rfloor$.

1. Tracer le graphe de la fonction $x\mapsto\{x\}$ définie sur $\mathbb{R}$
2. On dit que cette fonction est $1-$périodique : écrire cette propriété en quantificateurs.

Exercice 11 (Implémentations Python).

1. Écrire une fonction qui prend en argument un réel x et renvoie sa valeur absolue (sans utiliser de fonction prédéfinie !)
2. Écrire une fonction qui prend en argument une liste l (ou un `np.array`) et un réel m et qui dit si m est un minorant de l
3. Écrire une fonction qui prend en argument une liste et renvoie son minimum