Feuille d'exercices n°5

Études de suites : terme général, variations, bornes

Exercice 1. Dans chaque cas, déterminer les variations de la suite (u_n) dont on donne le terme général.

1. $u_n = n^2$
2. $u_n = 5 \times 0,2^n + 3$
3. $u_n = \dfrac{3n}{n+1}$
4. $u_n = \dfrac{2n+1}{3n+4}$
5. $u_n = \dfrac{3}{7^n} + 1$
6. $u_n = \dfrac{n}{2^n}$

♢ **Exercice 2.** Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2n - 1$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - n$

1. Montrer que (v_n) est une suite arithmético-géométrique
2. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de u_n

Exercice 3 (Deux suites)**.** On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$a_0 = 1,\ b_0 = 0 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + b_n \end{cases}$$

1. Exprimer a_n en fonction de n.
2. Calculer alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)$.
3. En déduire l'expression de b_n en fonction de n.

Suites de référence

Exercice 4 (Vrai/faux (justifier))**.**

1. La somme de deux suites arithmétiques est arithmétique.
2. Le produit de deux suites arithmétiques est arithmétique.
3. La somme de deux suites géométriques est géométrique.
4. Le produit de deux suites géométriques est géométrique.
5. Si (u_n) est géométrique de raison q, alors $(-u_n)$ est géométrique de raison $-q$.

Exercice 5. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 7 vérifiant $u_{100} = 540$. Déterminer u_{40}

Exercice 6 (Suites arithmético-géométriques)**.** Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et :

1. $u_{n+1} = 2u_n - 1$
2. $u_{n+1} = -u_n + 1$
3. $u_n = \frac{1}{2}u_n - 2$

Lesquelles de ces suites convergent-elles ?

Exercice 7 (Suites récurrentes linéaires)**.** Résoudre les récurrences suivantes avec : $u_0 = 0, u_1 = 1$

1. $u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 0$
2. $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 4u_n = 0$
3. $u_{n+2} = \sqrt{5}u_{n+1} - \frac{5}{4}u_n$

Exercice 8. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$$

1. Montrer que (v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
2. Déterminer v_n en fonction de n puis u_n.

◇ **Exercice 9** (Modélisation). Un site s'intéresse à son nombre d'abonnés : le 1er janvier 2023, le site en compte 100 000. On estime que le nombre des clients évolue ainsi : chaque mois, 4% des clients se désabonnent et 1% des non abonnés s'abonnent. Un client qui s'est désabonné est susceptible de se réabonner par la suite. Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, n mois après l'ouverture ($a_0 = 100$). La population cible globale est constituée de 20 millions d'individus.

1. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Selon cette modélisation, quel nombre maximal d'abonnés le site peut-il espérer ?
3. Écrire un programme Python qui permet d'obtenir le mois à partir duquel le site comptabilisera plus de 2 millions d'abonnés.

Études de limites de suites

◇ **Exercice 10** (Montrer qu'une suite est bien définie). Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

1. Pour quels réels a cette suite est bien définie ?
2. Si (u_n) converge, quelles sont les limites possibles ?
3. Étudier la convergence en fonction du paramètre a

Exercice 11 (Limites de suites). Calculer, si elles existent, les limites des suites ci-dessous.

1. $u_n = \dfrac{2n-5}{3n+1}$
2. $u_n = 2n - e^n$
3. $u_n = (-5)^n + 3n$
4. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ où $0 \leqslant a < b$.
5. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$
6. $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$
7. $u_n = \frac{e^n}{n^n}$
8. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}$
9. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2 + k}$

Exercice 12 (Irrationnalité de e). Soient les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Qu'en déduire en ce qui concerne la convergence ?
2. Donner une approximation à 10^{-3} près de leur limite.
3. On admet que cette limite est e. Montrer que e n'est pas un nombre rationnel.

Indication : Raisonner par l'absurde, encadrer e par u_n et v_n pour un certain n fixé et multiplier les inégalités par $n!$

◇ **Exercice 13** (Suite implicite (EDHEC 2018)). La lettre n désigne un entier naturel non nul. Soit f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n : x \longmapsto 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique, notée u_n.
2. Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$
3. En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis que la suite (u_n) est croissante.
4. Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
5. Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1

.

Exercice 14 (Comparaison avec une suite géométrique). Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n}{2^n}$. On note, pour $n \geqslant 1, v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

1. Montrer que (v_n) converge vers $\frac{1}{2}$
2. En déduire qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{3}{4}$$
3. Montrer que pour tout $n \geqslant n_0$, on a :
$$u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$$
4. En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 15. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant n$. En déduire la limite de (u_n).
2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = n + u_n$.
   (a) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}-1}{2^n} = \dfrac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \dfrac{n}{2^n}$
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$, puis sa limite quand $n \to +\infty$

♢ **Exercice 16.** Soit a et b des réels vérifiant $0 < a < b$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont bien définis, strictement positifs et vérifient : $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$
2. Étudier la monotonie de (u_n) et (v_n).
3. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ.
4. En étudiant la suite (u_nv_n), déterminer la valeur de ℓ.

Exercices théoriques

Exercice 17. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure M. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ ayant M comme limite, c'est-à-dire :

$$\exists (a_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, a_n \to M$$

Exercice 18 (Cas f décroissante)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction **décroissante** et (u_n) une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que $f \circ f$ est croissante
2. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones
3. Ont-elles parfois/jamais/toujours le même sens de variation ?
4. Petits exemples : étudier les cas $f : x \mapsto -2x$ et $f : x \mapsto -x$

♠ **Exercice 19** (Sous-suite)**.** Soit ϕ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante. Montrer que (u_n) est une suite qui a une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors $u_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Bonus : on peut refaire la même démonstration avec $\ell = \pm\infty$

♠ **Exercice 20** (Limite supérieure, limite inférieure)**.** Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \sup\{u_p | p \geqslant n\}$ et $y_n = \inf\{u_p | p \geqslant n\}$

1. Montrer que ces deux suites (x_n) et (y_n) sont bien définies.
2. Montrer que (x_n) est décroissante et (y_n) croissante
3. Montrer que (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers des valeurs α, β avec $\alpha \geqslant \beta$
4. Montrer que si $\alpha = \beta$, alors (u_n) converge.