Récurrence double, récurrence forte

Propriété *Soit P une proposition logique telle que $P(0), P(1)$ soient vraies et :* $\forall n \in \mathbb{N}, (P(n)$ *et* $P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$*. Alors :* $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

La preuve se fait par récurrence sur la propriété $Q(n)$: $P(n)$ et $P(n+1)$.

Rédaction : Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, P(n)$ **par récurrence double**.
Initialisation : pour $n = 0$ et $n = 1$: ...
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(P(n)$ et $P(n+1))$. Montrons $(P(n+2))$.
...
La récurrence est établie.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, (P(n))$.

Exemple *Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Soient α, β les racines du polynôme $P : x \mapsto x^2 - x - 1$, avec $\alpha > \beta$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$*

Exercice *Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0, u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$*

Exercice *On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2$*

Une autre variante : la récurrence forte. Cette fois, une seule initiation ($n = 0$ par exemple) mais dans l'hérédité on **suppose que pour tout $k \leq n$, $P(k)$ est vraie** et on montre $P(n+1)$.

Exercice *On considère une suite (u_n) définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$.
Conjecturer (avec les premiers termes) une expression de u_n, et la démontrer par récurrence forte.

Exercice *Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Montrer par récurrence forte que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$*

Exercice *Montrer par récurrence forte que tout nombre entier supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.*

Récurrence double, récurrence forte

Propriété *Soit P une proposition logique telle que $P(0), P(1)$ soient vraies et :* $\forall n \in \mathbb{N}, (P(n)$ *et* $P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$*. Alors :* $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

La preuve se fait par récurrence sur la propriété $Q(n)$: $P(n)$ et $P(n+1)$.

Rédaction : Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, P(n)$ **par récurrence double**.
Initialisation : pour $n = 0$ et $n = 1$: ...
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(P(n)$ et $P(n+1))$. Montrons $(P(n+2))$.
...
La récurrence est établie.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, (P(n))$.

Exemple *Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Soient α, β les racines du polynôme $P : x \mapsto x^2 - x - 1$, avec $\alpha > \beta$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$*

Exercice *Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0, u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$*

Exercice *On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2$*

Une autre variante : la récurrence forte. Cette fois, une seule initiation ($n = 0$ par exemple) mais dans l'hérédité on **suppose que pour tout $k \leq n$, $P(k)$ est vraie** et on montre $P(n+1)$.

Exercice *On considère une suite (u_n) définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$.
Conjecturer (avec les premiers termes) une expression de u_n, et la démontrer par récurrence forte.

Exercice *Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Montrer par récurrence forte que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$*

Exercice *Montrer par récurrence forte que tout nombre entier supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.*