

CHAPITRE 6 : FONCTIONS : LIMITES & CONTINUITÉ

Analyse 3

Bien rechercher les différences et les similitudes par rapport au chapitre précédent.

I. ÉTUDES LOCALES

1. Limite : version continue

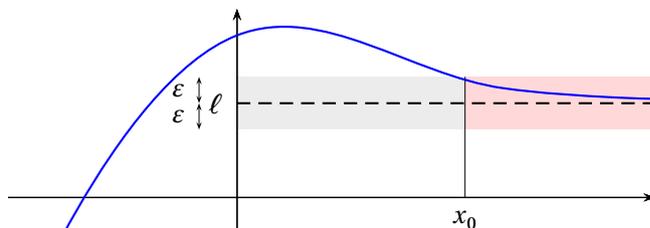
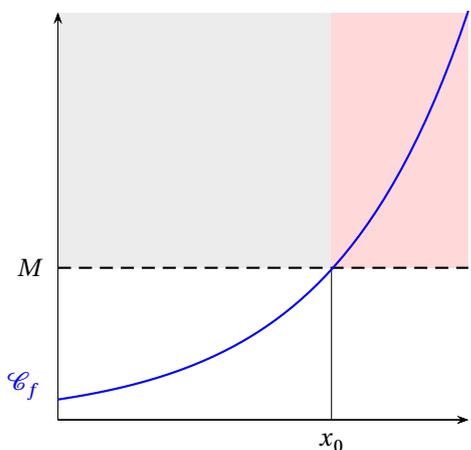
♥ **Définition 1** (Limite à l'infini). Soit  $I$  un intervalle non majoré et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ , noté  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , si :

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in I, \forall x \geq x_0, f(x) > M$$

Soit  $\ell$  un réel. On dit que  $f$  converge vers  $\ell$  en  $+\infty$ , noté  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ , si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in I, \forall x \geq x_0, |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Exercice. Écrire la définition de :  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ ;  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ ;  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell \in \mathbb{R}$



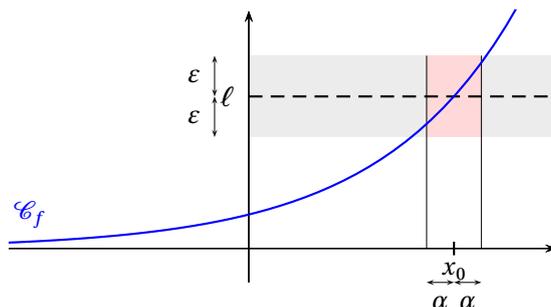
**Définition 2.** Dans le cas où  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \ell$ , on dit que la droite d'équation  $y = \ell$  est une **asymptote horizontale** du graphe de  $f$  en  $\pm\infty$ .

♥ **Définition 3** (Limite en un point). Soit  $I$  un intervalle,  $x_0 \in I$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $x_0$ , noté  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ , si :

$$\forall M > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap ]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[, f(x) > M$$

Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap ]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[, |f(x) - \ell| < \varepsilon$$



*Remarque.* • Se souvenir qu'on peut passer de l'écriture  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  à  $f(x) \in ]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$  et de même pour  $x \in ]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[ : |x - x_0| < \alpha$ .

- On peut aussi noter  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  mais il faut d'abord s'assurer de l'existence de cet objet!
- On peut généraliser à  $x_0$  extrémité de l'intervalle  $I$ , ou à  $f$  définie sur  $I \setminus \{x_0\}$  en ajoutant la contrainte «  $x \neq x_0$  »
- ♣ S'entraîner à écrire que  $f$  tend vers  $-\infty$  (avec le modèle  $+\infty$ !)
- Les mêmes définitions avec des  $\geq, \leq$  ( $f(x) \geq M$  par exemple) sont équivalentes

**Définition 4.** Dans le cas  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \pm\infty$ , on dit que la droite d'équation  $x = x_0$  est une **asymptote verticale** du graphe de  $f$  (dessin).

**Exemples.**

- $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$
- $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0, x > 0} +\infty$

*Démonstration.* En revenant à la définition en quantificateurs

♥ **Définition 5** (Continuité en  $x_0$ ). Soit  $f$  définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I$ . On dit que  $f$  est **continue** en  $x_0$  si :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$$

**Exemple.** Les fonctions affines sont continues en tout point  $x_0 \in \mathbb{R}$

**Définition 6** (Prolongement par continuité). Si  $f$  n'est pas définie en  $x_0$  et que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , on dit que  $f$  **se prolonge par continuité** en  $x_0$  : on peut définir la fonction  $\tilde{f}$  par :

$$\tilde{f}(x_0) = \ell \text{ et } \forall x \in I, x \neq x_0 \Rightarrow \tilde{f}(x) = f(x)$$

Alors,  $\tilde{f}$  est définie sur  $I \cup \{x_0\}$  et continue en  $x_0$

**Exemple.** La fonction  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  se prolonge en la fonction suivante, continue en 0 :

$$x \mapsto x \ln(x)$$

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

## 2. Propriétés de la limite

**Théorème 7** (Unicité de la limite). Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I \cup \{\pm\infty\}$ . Soient  $\ell, \ell'$  deux réels tels que :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell'$$

Alors,  $\ell = \ell'$

*Démonstration.*

*Remarque.* Ce théorème donne sa légitimité à la notation  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

**Propriété 8.** Soient  $f, g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  telles que :

$$\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$$

Soit  $x_0 \in I$  et  $\ell, \ell'$  deux réels tels que :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \quad ; \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell'$$

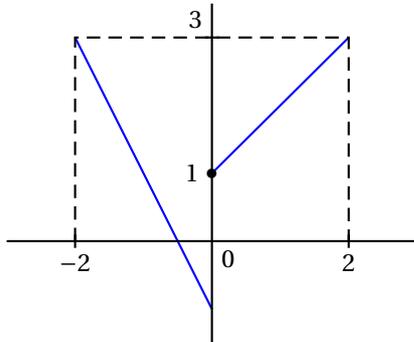
Alors,  $\ell \leq \ell'$

*Démonstration.*

### 3. Limites à gauche, limites à droite

**Exemple.**

$$\text{Soit } f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ -2x-1 & \text{sinon} \end{cases}$$



Dans cet exemple,  $f$  n'a pas de limite en 0. Mais si on regarde uniquement  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ , on voudrait dire que  $f$  tend vers 1 en 0. On appelle **restriction** de  $f$  à  $\mathbb{R}^+$  la fonction

$$f|_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)$$

Alors,  $f|_{\mathbb{R}^+}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$  et  $f|_{\mathbb{R}^{*-}}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$

On dit que  $f$  admet une **limite à gauche** (égale à  $-1$ ) et une **limite à droite** (égale à  $1$ ) en 0. On note :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -1 \quad ; \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$$



**Définition 9.** Soit  $f$  définie sur un intervalle  $I$ ,  $x_0 \in I$  (ou  $x_0$  est une borne de  $I$ ) et  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

- On dit que  $\ell$  est la **limite à gauche** de  $f$  en  $x_0$  si :
- On dit que  $\ell$  est la **limite à droite** de  $f$  en  $x_0$  si :

$$f|_{] -\infty; x_0[}(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$$

$$f|_{] x_0; +\infty[}(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$$

*Remarque* (Reformulation dans un des cas). Si  $\ell \in \mathbb{R}$ , la propriété de limite à gauche se ré-écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap ]x_0 - \alpha, x_0[, |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

*Notation.* On note  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} l$  ;  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} l$ .

$\triangle x_0^+, x_0^-$  ne sont pas des nombres!

**Exemple.** La fonction partie entière admet une limite à gauche et une limite à droite en 17.



Adapter pour la limite à gauche et à droite en  $n \in \mathbb{Z}$  quelconque.

**Propriété 10.**  $f$  a une limite en  $x_0$  si et seulement si  $f$  a une limite à gauche et une limite à droite en  $x_0$  égales à  $f(x_0)$  (ou égales entre elles si  $f$  n'est pas définie en  $x_0$ )

*Exercice.* Montrer que la fonction valeur absolue est continue en 0.

### 4. Théorèmes d'existence de limites



**Théorème 11** (Théorème de la limite monotone). Soient  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Soit  $f$  une fonction croissante sur  $]a; b[$ . Alors

- Si  $f$  est majorée :  $\exists \ell \in \mathbb{R}, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} \ell$ .  
Sinon,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$
- Si  $f$  est minorée :  $\exists \ell \in \mathbb{R}, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ .  
Sinon,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$

Soit  $f$  une fonction décroissante sur  $]a; b[$ . Alors

- Si  $f$  est majorée :  $\exists \ell \in \mathbb{R}, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ .  
Sinon,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$
- Si  $f$  est minorée :  $\exists \ell \in \mathbb{R}, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} \ell$ .  
Sinon,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} -\infty$

*Remarque.* Faire un dessin pour chacun de ces cas, plutôt que d'apprendre par cœur.

**Théorème 12** (Théorème des gendarmes). Soient  $f, g, h$  définies sur un intervalle  $I$ ,  $x_0 \in I$  et  $l \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ . Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

*Démonstration.* Savoir adapter les preuves du chapitre précédent!  $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$  au lieu de  $n_0 = \max(n_1, n_2)$

## 5. Limites classiques

**Exemples** (Admis - démonstrations plus tard dans l'année). Les limites suivantes sont à connaître par cœur dans les semaines à venir

- $\forall n \in \mathbb{N}, x^n \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
- Si  $n \in \mathbb{N}$  est pair,  $x^n \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$
- Si  $n \in \mathbb{N}$  est impair,  $x^n \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$
- Si  $n$  est un entier,  $x^n e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
- $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$
- $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$
- $\frac{\cos(x) - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
- $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$
- $\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \frac{\ln(x)^n}{x^m} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
- $\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, x^m \ln(x)^n \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$

## 6. Opérations sur les limites

*Remarque* (Opérations algébriques). Toutes les opérations sur les limites qui étaient vraies pour les suites se transposent immédiatement aux fonctions (somme, produit, quotient)! - idem pour les formes indéterminées

**Propriété 13** (« Composition » fonction/suites). Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I, \ell \in \mathbb{R}$  tels que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f = \ell$ . Soit  $(u_n)$  une suite vérifiant :  $\lim u_n = x_0$ . Alors, la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$$

**Exemple.** Admettons que la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}$  converge : que dire de sa limite?

*Démonstration.*

**Propriété 14** (Composition). Soient  $a, b, c$  trois réels tels que  $f$  soit définie sur un intervalle  $I_1$  contenant  $a$ ,  $g$  sur un intervalle  $I_2$  contenant  $b$  et telles que  $g \circ f$  soit bien définie. On a alors l'implication :

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} c \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} c \right]$$

*Démonstration.* À remettre dans l'ordre, en complétant les « ... » par 1 ou 2 :

1. Soit  $x \in I_{\dots}$  vérifiant  $|x - a| < \alpha'$ .
2. Puisque  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$  :
3. Ainsi,  $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$
4. Soit  $\varepsilon > 0$ .
5. et donc  $|g(f(x)) - c| < \varepsilon$
6. il existe  $\alpha > 0$  tel que :  $\forall y \in I_{\dots}, |y - b| < \alpha \Rightarrow |g(y) - c| < \varepsilon$
7. il existe  $\alpha' > 0$  tel que :  $\forall x \in I_{\dots}, |x - a| < \alpha' \Rightarrow |f(x) - b| < \alpha$
8. Alors,  $|f(x) - b| < \alpha$
9. Puisque  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} c$  :

## II. ÉTUDE GLOBALE

### 1. Fonctions continues sur un intervalle

**Définition 15.** On dit que  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  si elle est définie sur  $I$  et continue en tout  $x \in I$

*Notation.* On note  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), \mathcal{C}(I)$  ou  $\mathcal{C}^0(I)$  l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle  $I$

**Théorème 16** (Opérations sur les fonctions continues). Soit  $I$  un intervalle et  $f, g$  deux fonctions continues définies sur  $I$ .

- $f + g, f - g, f \times g, \max(f, g), \min(f, g)$  sont continues
- Si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $\frac{f}{g}$  est continue
- Si  $g \circ f$  est bien définie, elle est continue

*Remarque :* ici,  $f$  et  $g$  ne sont pas nécessairement définies sur un même intervalle

*Démonstration.* Démonstration pour min et max en utilisant la valeur absolue, le reste se déduit des opérations sur les limites vues précédemment.

- Toutes les fonctions polynômiales sont continues sur  $\mathbb{R}$
- Les fonctions  $x \mapsto \sqrt{x}$ ,  $\exp$ ,  $\ln$ , valeur absolue,  $\sin$ ,  $\cos$  sont continues sur leur ensemble de définition (à connaître).

**Exemples.**

- La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$
- La fonction partie entière n'est **pas** continue : elle admet une discontinuité en tout entier relatif.

**Exemple.** En combinant, on peut ainsi affirmer que la fonction  $x \mapsto \frac{\sqrt{e^x+x^3}}{x+2}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$

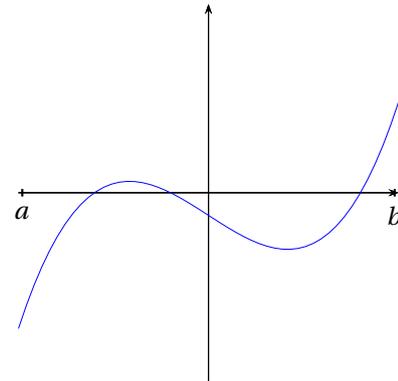
*Exercice.* Sur quel ensemble peut-on affirmer que la fonction  $x \mapsto \ln(x)^2 + \ln(x-1)$  est continue?

## 2. Le Théorème des Valeurs Intermédiaires

♥ **Théorème 17.** Soient  $a < b$  deux réels et  $f$  continue sur  $[a; b]$  vérifiant  $f(a)f(b) < 0$ . Alors

$$\exists c \in ]a; b[, f(c) = 0$$

*Remarque.* Ce théorème se généralise au cas où  $f$  est définie sur  $]a; b[$  avec une limite en  $a$  et en  $b$  de signes contraires (potentiellement infinies)



*Démonstration.*

**Exemple.** Tout polynôme de degré impair a au moins une racine

**Propriété 18** (Application). Pour tout intervalle  $I$  et toute fonction continue sur  $I$ ,  $f(I)$  est un intervalle

*Démonstration.*

L'hypothèse **intervalle** est importante pour toute cette famille de théorèmes!

## 3. Fonctions continues bornées

**Théorème 19** (Théorème des bornes - admis). Soient  $a < b$  deux réels et  $f$  une fonction **continue** définie sur le segment  $[a; b]$ . Alors  $f$  est bornée :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in [a; b], m \leq f(x) \leq M$$

De plus,  $f$  atteint ses bornes, c'est-à-dire que  $f([a; b]) = [m; M]$  :  $m$  et  $M$  ont des antécédents par  $f$ .

*Exercice.* Soit  $f : x \mapsto (x^4 + 3x^2)e^{-x^2}$

1. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$
2. Montrer qu'il existe  $A, B \in \mathbb{R}$  tels que : si  $x \notin [A; B]$  alors  $|f(x)| \leq 1$
3. Montrer que  $f$  est bornée.

## 4. Fonctions continues strictement monotones

♥ **Théorème 20** (Admis - Théorème de la bijection). Soit  $I$  un intervalle et  $f$  une fonction **continue** et **strictement monotone** définie sur  $I$ . Alors  $f : I \rightarrow f(I)$  est bijective et  $f^{-1}$  est continue sur  $f(I)$  et a le même sens de variation que  $f$

*Remarque.* Ce que dit/ne dit pas ce théorème :

- la surjectivité de  $f$  est triviale dès lors qu'on a restreint l'ensemble d'arrivée à  $f(I)$  (cf chapitre 2)
- l'injectivité de  $f$  n'utilise en fait pas la continuité de  $f$  : la stricte monotonie suffit
- la vraie **conclusion** du théorème est ce que l'on peut dire de  $f^{-1}$
- Respectivement, une fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone, mais ce n'est pas dit dans ce théorème : à démontrer.

*Remarque* (Allure du graphe de la fonction réciproque - admis). Symétrie par rapport à la diagonale principale

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$$