

Feuille d'exercices n°6

Calculs : limites et continuité**Exercice 1** (Trouver des limites). Déterminer les limites suivantes :

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\frac{x^4 - x^3 + 1}{2 - 3x^4}$ en $\pm\infty$ | 4. $x^5 e^{-x^2}$ en $+\infty$ | 7. $\frac{x + \cos(x)}{x + \sin(x)}$ en $+\infty$ |
| 2. $x \ln(\sin(x))$ en 0^+ | 5. $\frac{x \ln x + 7}{x^2 + 4}$ en $+\infty$ | 8. $\ln(x) \ln(\ln(x))$ en 1^+ |
| 3. $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ en 1 | 6. $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1 | 9. $\frac{\sin(9x)}{\sin(3x)}$ en 0 |

◇ **Exercice 2** (Limites - avec des parties entières). Étudier les limites à droite en 0 des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad g : x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad h : x \mapsto x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

◇ **Exercice 3.** Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & \text{si } x > 1 \\ x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} (x-2) \ln|x-2| + 3 & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$
3. $f(x) = [x] + (x - [x])^2$

Exercice 4 (Démonstrations : croissances comparées). Soit g la fonction (dérivable) définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, g(x) \geq 0$
2. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$
3. Conclure sur la limite à l'infini de $\frac{\ln(x)}{x}$
4. En posant $u = \frac{1}{x}$, montrer $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$
5. En posant $u = e^x$, montrer $\frac{x}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Applications : études de fonctions, études graphiques

◇ **Exercice 5** (D.E.S.). On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$

1. Sur quel ensemble E peut-on définir cette fonction ?
2. On cherche à montrer qu'il existe un unique $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in E, f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

On raisonnera par analyse-synthèse.

- (a) En étudiant la limite en 0 de $xf(x)$, justifier qu'on a nécessairement $a = -1$
- (b) De la même façon, déterminer une condition nécessaire sur b et c pour qu'une telle égalité soit vraie.
- (c) Conclure.

Exercice 6 (Fonction réciproque - courbe). Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$
 $x \longmapsto \frac{2}{3x-1}$

1. Étudier les variations et les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
2. Tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé
3. Montrer que f est bijective.
4. Par le calcul, donner une expression de f^{-1}
5. Tracer de même l'allure de la courbe de f^{-1} dans le même repère
6. Tracer la droite d'équation $y = x$ et vérifier (à l'œil nu) que les deux courbes sont bien symétriques l'une de l'autre par rapport à cette droite.



Exercice 7 (Asymptotes obliques). Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f admet une asymptote oblique en $+\infty$ si il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) - (ax + b) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Dans ce cas, l'équation de l'asymptote oblique est : $y = ax + b$

1. Justifier l'expression «asymptote oblique»
2. Montrer que si f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$, alors

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$$

3. Que dire des asymptotes obliques d'une fonction affine ?
4. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x + 1}$ admet une asymptote oblique dont on déterminera l'équation. Admet-elle d'autres asymptotes ?

Exercice 8. On considère la fonction f définie par $f(x) = -2 \frac{xe^x - 1}{e^x - 1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Étudier le signe de $e^x - x$.
3. En déduire les variations de f .
4. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
5. Montrer que la courbe de f admet trois asymptotes dont on déterminera les équations.
6. Étudier les positions relatives de la courbe et de l'asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$.
7. Tracer le graphe de f .

Exercice 9.

1. Montrer que l'équation $x^5 = x^2 + 2$ a au moins une solution sur $]0, 2[$.
2. Montrer que le polynôme $x^3 + 2x - 1$ a une unique racine qui appartient à l'intervalle $]0, 1[$.
3. Montrer que l'équation $x^2(\cos x)^5 + x \sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution réelle.

Résultats théoriques (fonctions abstraites)

Exercice 10 (Démonstration du TVI par dichotomie). Soient $a < b$ deux réels et f continue sur $[a; b]$ telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. On construit deux suites avec : $a_0 = a, b_0 = b$ et le phénomène suivant : on construit $m = \frac{a_n + b_n}{2}$. Si $f(m) < 0$, on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$. Si $f(m) \geq 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) \geq 0$
2. Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes
3. Conclure.
4. Pour $f : x \mapsto x^2 - 2$ sur $[1; 2]$, adapter en un script Python donnant une valeur approchée de $\sqrt{2}$

Exercice 11 (Max de fonctions continues). Montrer par récurrence que si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions continues, alors $\max(f_1, \dots, f_n)$ est une fonction continue.

Exercice 12 (Caractérisation séquentielle de la limite). *Hors programme, mais instructif, pour manipuler les définitions.* En raisonnant par l'absurde, démontrer que si pour toute suite (x_n) vérifiant $x_n \rightarrow x$, $(f(x_n)) \rightarrow f(x)$, alors f est continue en x



Exercice 13. Soient $a < b$ deux réels et $f : [a; b] \rightarrow [a; b]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a, b]$ vérifiant $f(x) = x$

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.



Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant des limites finies en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17. Montrer qu'une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$ est constante.



Exercice 18 (Équation différentielle et unicité de la limite). Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f = 2f'$. On suppose que f a une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$

1. Montrer que f' a une limite en $+\infty$
2. Montrer que si f et f' ont une limite en $+\infty$ alors f' tend vers 0
3. En déduire la limite de f en $+\infty$