Disjonction de cas

Propriété *Pour trois propositions logiques A, B, C, il y a équivalence entre :*

1. $(A \text{ ou } B) \Rightarrow C$
2. $(A \Rightarrow C)$ *et* $(B \Rightarrow C)$

Idée : si A ou B est toujours vraie (parce que A et B recouvrent «tous les cas») et qu'on montre $A \Rightarrow C$ et $B \Rightarrow C$, on a montré la propriété C.

Le mode de raisonnement par **disjonction de cas** permet de montrer une propriété universelle en considérant plusieurs cas.
Exemples : si x est positif puis si x est négatif ; si n est pair puis si n est impair, etc.
Non-exemple : si f est croissante puis si f est décroissante. Pourquoi ?

Exemple *Montrer par disjonction de cas que pour tout entier n, $n^3 + n^2$ est un nombre pair.*

Exercice *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, décroissante sur $]-\infty; 5]$ et croissante sur $[5; +\infty[$ telle que $f(5) = -3$. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq -3$*

Exercice *Soit f une fonction monotone sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}$*

Exercice *Montrer que pour tout entier relatif n, $n(n-5)(n+5)$ est divisible par 3.*
On pourra considérer les cas : n s'écrit sous la forme $2k$, n s'écrit sous la forme $2k+1$, n s'écrit sous la forme $2k+2$, avec k un entier.

Disjonction de cas

Propriété *Pour trois propositions logiques A, B, C, il y a équivalence entre :*

1. $(A \text{ ou } B) \Rightarrow C$
2. $(A \Rightarrow C)$ *et* $(B \Rightarrow C)$

Idée : si A ou B est toujours vraie (parce que A et B recouvrent «tous les cas») et qu'on montre $A \Rightarrow C$ et $B \Rightarrow C$, on a montré la propriété C.

Le mode de raisonnement par **disjonction de cas** permet de montrer une propriété universelle en considérant plusieurs cas.
Exemples : si x est positif puis si x est négatif ; si n est pair puis si n est impair, etc.
Non-exemple : si f est croissante puis si f est décroissante. Pourquoi ?

Exemple *Montrer par disjonction de cas que pour tout entier n, $n^3 + n^2$ est un nombre pair.*

Exercice *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, décroissante sur $]-\infty; 5]$ et croissante sur $[5; +\infty[$ telle que $f(5) = -3$. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq -3$*

Exercice *Soit f une fonction monotone sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}$*

Exercice *Montrer que pour tout entier relatif n, $n(n-5)(n+5)$ est divisible par 3.*
On pourra considérer les cas : n s'écrit sous la forme $2k$, n s'écrit sous la forme $2k+1$, n s'écrit sous la forme $2k+2$, avec k un entier.