Devoir Maison n°3 - Deux suites cousines

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 0, b_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 2a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & 2a_n + 3b_n \end{array} \right.$$

L'objectif est de déterminer le terme général des suites (a_n) et (b_n)

1. Écrire une fonction Python `suites(n)` prenant en argument un entier naturel n et renvoyant a_n et b_n

```python
def suites(n):
    a,b = 0,1
    for k in range(n):
        a,b = 2*a+b, 2*a+3*b
    return a,b
```

2. Calculer a_1, b_1, a_2, b_2 (et d'autres termes si vous voulez)
La consigne «et d'autres termes si vous voulez» n'est bien sûr pas une consigne de concours, c'est simplement pour prendre l'habitude de «regarder» à quoi ressemblent ces suites : tester, tracer des courbes, prendre plusieurs valeurs.
Ici, on a : $a_1 = 2a_0 + b_0 = 1, b_1 = 2a_0 + 3b_0 = 3, a_2 = 2a_1 + b_1 = 2 + 3 = 5, b_2 = 2a_1 + 3b_1 = 2 + 9 = 11$

3. **Méthode 1.**
   (a) Déterminer une relation de récurrence sur la suite (s_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = a_n + b_n$
   Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= 2a_n + b_n + 2a_n + 3b_n \\ &= 4(a_n + b_n) \\ &= 4s_n \end{aligned}$$

   (b) Déterminer une relation de récurrence sur la suite (t_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 2a_n - b_n$
   Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 2a_{n+1} - b_{n+1} \\ &= 2(2a_n + b_n) - (2a_n + 3b_n) \\ &= 2a_n - b_n \\ &= t_n \end{aligned}$$

   (c) Déterminer grâce aux questions précédentes une expression explicite de s_n et de t_n pour tout n entier.
   (t_n) est constante donc égale à $t_0 = 2a_0 - b_0 = -1$: $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = -1$. (s_n) est géométrique de raison 4 et de premier terme 1 d'où : $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = 4^n$
   (d) En déduire le terme général de (a_n) et (b_n)
   On a le système suivant pour tout n entier :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a_n & + & b_n & = & 4^n \\ 2a_n & - & b_n & = & -1 \end{array} \right.$$

   On résout : $a_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ et $b_n = 4^n - a_n = 4^n - \frac{1}{3}(4^n - 1) = \frac{2}{3} \times 4^n + \frac{1}{3}$

4. **Méthode 2.**
   (a) Montrer que (a_n) est une suite linéaire d'ordre 2
   Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= 2(2a_n + b_n) + (2a_n + 3b_n) \\ &= 6a_n + 5b_n \\ &= 5(2a_n + b_n) - 4a_n \\ &= 5a_{n+1} - 4a_n \end{aligned}$$

   Ainsi, (a_n) est une suite linéaire d'ordre 2 et de polynôme caractéristique $P(x) = x^2 - 5x + 4$

(b) Grâce à un théorème du cours, en déduire le terme général de (a_n), puis celui de (b_n)
P a comme discriminant $\Delta = 5^2 - 16 = 9$ et comme racines $\frac{5+3}{2} = 4$ et $\frac{5-3}{2} = 1$. Puisque P a deux racines, d'après le théorème du cours, il existe deux réels λ, μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \lambda 4^n + \mu 1^n = \lambda 4^n + \mu$$

Pour déterminer λ et μ, on constate que pour $n = 0$: $a_0 = 0 = \lambda + \mu$ et $a_1 = 1 = 4\lambda + \mu$ d'où $\lambda = \frac{1}{3}$ et $\mu = -\frac{1}{3}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{3} \times 4^n - \frac{1}{3}$$

et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_{n+1} - 2a_n = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1) - \frac{2}{3}(4^n - 1) = \frac{2}{3} \times 4^n + \frac{1}{3}$$

5. **Une troisième suite.** Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$$

Recopier et exécuter le code Python suivant :
Remarque : il faut aussi intégrer le code Python de la première question !

```
for k in range(5):
    print(suites(k))
def u(n):
    u, v = 0, 1
    for k in range(n):
        print(u)
        u, v = v, v + 2*u
u(10)
```

Qu'affiche l'exécution de ce programme ? En tirer une conjecture sur la suite (u_n) et son lien avec les suites (a_n) et (b_n), puis démontrer cette conjecture.
Le programme doit afficher d'abord les 5 premiers termes des suites (a_n, b_n) puis les 10 premiers termes de la suite (u_n).
On obtient :

```
(0;1)
(1;3)
(5;11)
(21;43)
(85;171)
0
1
1
3
5
11
21
43
85
171
```

On conjecture la chose suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$. Montrons-le par récurrence.
Initialisation : pour $n = 0$, $a_0 = 0 = u_0$ et $b_0 = 1 = u_1$ donc la propriété est initialisée.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = u_{2n}$ et $b_n = u_{2n+1}$. Alors :

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n = 2u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n+2} = u_{2(n+1)}$$

et

$$b_{n+1} = 2a_n + 3b_n = 2u_{2n} + 3u_{2n+1} = 2(u_{2n+1} + 2u_{2n}) + u_{2n+1} = 2u_{2n+2} + u_{2n+1} = u_{2n+3} = u_{2(n+1)+1}$$

La récurrence est établie.