Feuille d'exercices n°5

Exercice 1. Dans chaque cas, déterminer les variations de la suite (u_n) dont on donne le terme général.

1. $u_n = n^2$
   La fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. $u_n = 5 \times 0,2^n + 3$
   Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 5 \times 0,2^n \times (0,2-1) = -4 \times 0,2^n < 0$ donc (u_n) est décroissante.
3. $u_n = \dfrac{3n}{n+1}$
   (u_n) est positive. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(n+1)}{n+2} \times \frac{n+1}{3n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \geq 1$ si $(n+1)^2 \geq n(n+2)$, i.e. $n^2 + 2n + 1 \geq n^2 + 2n$, ce qui est toujours vrai. Ainsi, (u_n) est croissante.
4. $u_n = \dfrac{2n+1}{3n+4}$
   Avec le même raisonnement on voit que (u_n) est décroissante.
5. $u_n = \dfrac{3}{7^n} + 1$
   En calculant $u_{n+1} - u_n$, on voit que (u_n) est décroissante.
6. $u_n = \dfrac{n}{2^n}$
   (u_n) est une suite positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}$. Or, pour $n \geq 1$, $2n \geq n+1$ et donc (u_n) est décroissante.

Exercice 4 (Vrai/faux (justifier))**.**

1. La somme de deux suites arithmétiques est arithmétique.
   Vrai : si (u_n) et (v_n) sont arithmétiques avec $u_n = u_0 + nr$ et $v_n = v_0 + nr'$, alors $u_n + v_n = (u_0 + v_0) + n(r + r')$: $(u_n + v_n)$ est arithmétique de raison $r + r'$
2. Le produit de deux suites arithmétiques est arithmétique.
   Faux (choisir un contre exemple simple)
3. La somme de deux suites géométriques est géométrique.
   Faux (choisir un contre exemple simple)
4. Le produit de deux suites géométriques est géométrique.
   Vrai : si (u_n) et (v_n) sont géométriques avec $u_n = u_0 q^n$ et $v_n = v_0 q'^n$, alors $u_n v_n = (u_0 v_0)(qq')^n$ donc $(u_n v_n)$ est géométrique de raison qq'
5. Si (u_n) est géométrique de raison q, alors $(-u_n)$ est géométrique de raison $-q$.
   Faux : choisir un contre exemple. Globalement, garder en tête que si $u_n = u_0 q^n$, alors $u_n = -u_0 q^n \neq u_0(-q)^n$ (notamment pour n pair les deux termes diffèrent)

Exercice 5. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 7 vérifiant $u_{100} = 540$. Déterminer u_{40}
$u_{40} = u_{100} - 60 \times 7 = 540 - 420 = 120$

Exercice 17. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure M. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ ayant M comme limite, c'est-à-dire :

$$\exists (a_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, a_n \to M$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de $\mathcal{A}$, donc : $\exists a_n \in \mathcal{A}, M - \frac{1}{n} \leq a_n \leq M$. Par théorème des gendarmes, on a alors $a_n \to M$.
Il y a donc une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ qui convergent vers la borne supérieure de $\mathcal{A}$

Exercice 18 (Cas f décroissante)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction **décroissante** et (u_n) une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que $f \circ f$ est croissante
   Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$.
   Par décroissance de f, $f(x) \geq f(y)$. En réitérant : $f(f(x)) \leq f(f(y))$ i.e. $(f \circ f)(x) \leq (f \circ f)(y)$ et ainsi $f \circ f$ est une fonction croissante.

2. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones
   Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(u_{2n})$. De même, on vérifie que $u_{2(n+1)+1} = (f \circ f)(u_{2n+1})$. Puisque $f \circ f$ est une fonction croissante, d'après un théorème du cours, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
3. Ont-elles parfois/jamais/toujours le même sens de variation ?
   Les deux suites ont des sens de variation opposés : si (u_{2n}) est croissante par exemple, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ et par décroissance de f, $u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$ et ainsi (u_{2n+1}) est une suite décroissante. De même dans l'autre cas.
4. Petits exemples : étudier les cas $f : x \mapsto -2x$ et $f : x \mapsto -x$
   Ces deux fonctions (linéaires) sont clairement décroissantes. On a deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_{n+1} = (-2)u_n$ et $v_{n+1} = -v_n$ pour tout n. Dans le deuxième cas, les suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont en fait constantes (et opposées). Dans le premier cas, $u_n = u_0 \times (-2)^n$ et alors les deux suites extraites sont données par $u_{2n} = u_0 4^n$ (croissante tend vers $+\infty$) et $u_{2n+1} = -2u_0 \times 4^n$ (décroissante tend vers $-\infty$).
   Remarque : souvent, on arrive ensuite à montrer, par exemple, que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes et convergent vers une même limite ℓ et ainsi : $u_n \to \ell$

♠ **Exercice 19** (Sous-suite). Soit ϕ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante. Montrer que (u_n) est une suite qui a une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors $u_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Bonus : on peut refaire la même démonstration avec $\ell = \pm\infty$
Si $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors elle tend vers $+\infty$ et on peut montrer, par récurrence : $\phi(n) \geq n$.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \to \ell$, alors il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Or, $\phi(n_0) \geq n_0$ et par croissance de ϕ, pour tout $n \geq n_0$, $\phi(n) \geq \phi(n_0) \geq n_0$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $|u_\phi(n) - \ell| \leq \varepsilon$. Ainsi : $u_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Remarque : c'est ce qu'on utilise, dans un cas très simple, quand on écrit : «si $u_n \to \ell$, alors $u_{n+1} \to \ell$»

♠ **Exercice 20** (Limite supérieure, limite inférieure). Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \sup\{u_p | p \geq n\}$ et $y_n = \inf\{u_p | p \geq n\}$

1. Montrer que ces deux suites (x_n) et (y_n) sont bien définies.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\{u_p | p \geq n\}$ n'est pas vide, et il est borné puisque la suite (u_n) est bornée. Ainsi, il admet bien une borne supérieure, et donc x_n est bien défini. De même pour y_n.
2. Montrer que (x_n) est décroissante et (y_n) croissante
   Soit $n \in \mathbb{N}$ On remarque que $\{u_p | p \geq n+1\} \subset \{u_p | p \geq n\}$. Notons ces deux ensembles E_{n+1} et E_n. Puisque x_n est un majorant de E_n, et que $E_{n+1} \subset E_n$, alors x_n est un majorant de E_{n+1}. Puisque x_{n+1} est **le plus petit** majorant de E_{n+1}, alors $x_{n+1} \leq x_n$ et la suite (x_n) est décroissante. Le même raisonnement permet de montrer que (y_n) est croissante.
3. Montrer que (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers des valeurs α, β avec $\alpha \geq \beta$
   Puisque (u_n) est bornée, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$. Alors, pour tout n, M est un majorant de l'ensemble E_n introduit à la question précédente, et donc $x_n \leq M$. Ainsi, (x_n) est croissante et majorée par M donc converge vers un réel α. De même pour (y_n). Par ailleurs, pour chaque entier n, $\inf(E_n) \leq \sup(E_n)$ i.e. $y_n \leq x_n$ et en passant à la limite $\beta \leq \alpha$
   Remarque : α et β sont appelées limite supérieure et limite inférieure de la suite (u_n). Cette notion n'est pas au programme d'ECG.
4. Montrer que si $\alpha = \beta$, alors (u_n) converge.
   Supposons (x_n) et (y_n) convergentes vers le même réel α. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $u_n \in E_n$, alors $y_n \leq u_n \leq x_n$ et par théorème des gendarmes : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$