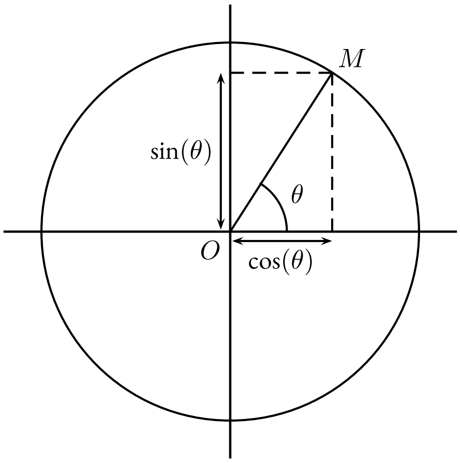
Devoir Maison n°6 : Trigonométrie

Le polycopié du chapitre de trigonométrie sera un catalogue des formules et propriétés à connaître, sans démonstration (on les fait ici !). **Les parties I.3. et II.4. sont à rédiger. Le reste ne sera pas relevé**, mais est tout de même à faire. Le devoir sera partiellement corrigé en classe, je vous invite à le travailler sérieusement pour tirer parti de la correction. C'est à la fois l'occasion de travailler ces formules (exigibles), et de retravailler un certain nombre de notions, d'analyse notamment.

I. Premières fonctions trigonométriques : Sinus et Cosinus

1. Rappels utiles



Sinus et cosinus : Dans un repère orthonormé, on s'intéresse au cercle $\mathcal{C}$ centré en $(0,0)$ et de rayon 1 appelé **cercle trigonométrique**. Pour $M \in \mathcal{C}$ formant un angle θ avec l'axe des abscisses ($\theta \in \mathbb{R}$), on appelle $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ l'abscisse et l'ordonnée de M. Ainsi, les coordonnées de M sont $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.
L'angle θ est ici exprimé en **radian**, c'est-à-dire qu'un tour complet du cercle correspond à un angle de 2π

Produit scalaire : Pour deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ formant un angle θ, et de coordonnées respectives (x,y) et (x',y')

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta) = xx' + yy'$$

Norme : On rappelle que la norme d'un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x,y) est la quantité

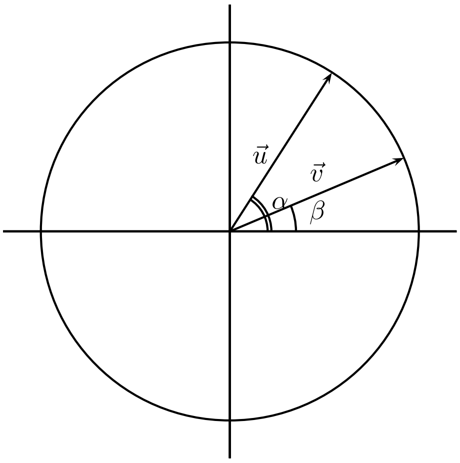
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2. Premières propriétés, lien entre sinus et cosinus

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$
2. Justifier :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x+2\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$
3. Graphiquement, représenter sur un cercle trigonométrique et interpréter les propriétés suivantes :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x+\pi) = -\cos(x)$
   (d) $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x+\pi) = -\sin(x)$
   (e) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi - x) = -\cos(x)$
   (f) $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi - x) = \sin(x)$
   (g) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
4. En déduire pour tout x réel :
   (a) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
   (b) $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$
   (c) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$
5. Résoudre l'équation : $\cos(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

- La fonction **cosinus** est **paire**, la fonction **sinus** est **impaire**
- Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-**périodiques**
- On retiendra l'interprétation géométrique de ces formules

3. Formules d'addition et de multiplication



1. On considère des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de norme 1 formant des angles respectifs α et β avec l'axe des abscisses. Montrer que

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

2. En déduire :

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

3. En utilisant les propriétés de la section précédente, montrer :

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\beta)\cos(\alpha)$$

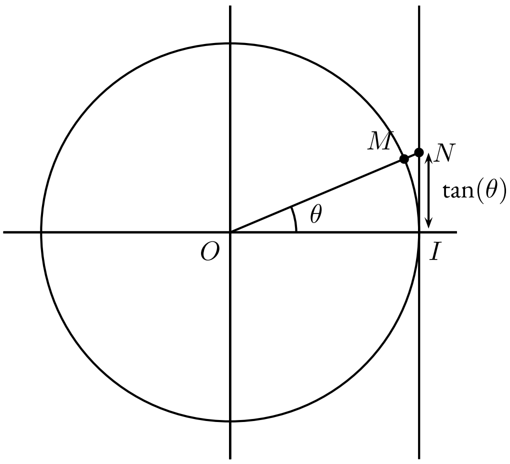
4. (a) En utilisant les questions précédentes, montrer :

$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

   (b) Proposer des formules similaires pour $\cos(\alpha)\sin(\beta)$, $\sin(\alpha)\cos(\beta)$ et $\sin(\alpha)\sin(\beta)$

II. Tangente, arctangente

1. Définition



On note E l'ensemble $\{\frac{\pi}{2}+n\pi | n\in\mathbb{Z}\}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash E$ on appelle **tangente** de x la quantité

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$\mathbb{R}\backslash E$ est l'ensemble de définition de la fonction tangente.

Graphiquement, la tangente de θ correspond à l'ordonnée du point N d'abscisse 1 tel que $\widehat{ION}=\theta$ (on continue la droite (OM) jusqu'à croiser la droite d'équation $x=1$). Si $\theta\in]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}[$, les points M,O,N sont alignés dans cet ordre.

2. Une limite admise du cours

1. En considérant les triangles OMI et ONI, ainsi que la portion de disque définie par O, M et I, justifier

$$\forall\theta\in[0;\frac{\pi}{2}[,\sin(\theta)\leq\theta\leq\tan(\theta)$$

2. En déduire

$$\forall x\in[0;\frac{\pi}{2}[,\cos(x)\leq\frac{\sin(x)}{x}\leq 1$$

   et finalement la limite à droite en 0 de $\frac{\sin(x)}{x}$. Comment adapter pour déterminer la limite à gauche ?

Dans la suite, les limites usuelles du chapitre 6 seront admises.

3. Une dernière formule d'addition

Montrer que pour tous α, β vérifiant $\tan(\alpha)$, $\tan(\beta)$ et $\tan(\alpha+\beta)$ bien définis,

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

4. Dérivation

1. En utilisant les formules d'addition et de soustraction de **sin** et **cos**, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \cos(x) \quad \text{et} \quad \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} -\sin(x)$$

2. En déduire que les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donner leurs fonctions dérivées
3. Montrer que tan est dérivable sur son ensemble de définition et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash E$,

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$

4. Que dire de la périodicité de tan ? Est-ce une fonction injective sur $\mathbb{R}\backslash E$?
5. En déduire le tableau de variation de la fonction tangente (sur chaque intervalle inclus dans $\mathbb{R}\backslash E$!)
6. Montrer que la restriction de tan $:]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est bijective de bijection réciproque strictement croissante
7. On appelle cette bijection réciproque **arctangente** notée arctan. Tracer le tableau de variation de cette fonction, en déterminant ses limites éventuelles.

> Remarque : on déterminera la valeur de la dérivée de arctan dans notre chapitre de dérivation

8. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\tan(\arctan(x)) = x$? $\arctan(\tan(x)) = x$?

III. Applications

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2\cos^2(x) - 1$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$
3. **Plus difficile.** Soit $k \in \mathbb{N}$. En calculant $\tan(\arctan(k+1) - \arctan(k))$, simplifier $\arctan(k+1) - \arctan(k)$.
   En déduire la limite de la suite (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$