Devoir Maison n°5 - Autour de la continuité

Applications lipschitziennes

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est k-**lipschitzienne** si :

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$$

1. Montrer que toute fonction k-lipschitzienne est **continue** sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que la réciproque est fausse en montrant que la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est continue mais pas lipschitzienne.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne avec $k < 1$ et $f(0) = 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite réelle déterminée par $u_0 = a$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq k^n |a|$
   (b) En déduire : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Une équation fonctionnelle et le raisonnement par analyse-synthèse

On cherche toutes les fonctions **continues** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

On fait ce que l'on appelle un **raisonnement par analyse-synthèse :** dans une première partie, appelée **analyse**, nous allons chercher des conditions nécessaires pour qu'une fonction f soit solution du problème, en cherchant des conditions les plus contraignantes possibles. Dans une deuxième partie, appelée **synthèse**, nous vérifierons que les conditions trouvées dans l'analyse sont en fait des conditions nécessaires **et suffisantes**.

Analyse : Soit f une fonction solution du problème précédent.

1. Supposons dans un premier temps que $f(0) = f(1) = 0$.
   (a) Montrer : pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $f(p) = 0$
   (b) Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, $f(p) = 0$
   (c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{p}{2^n}\right) = 0$
   (d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$. Démontrer que (x_n) converge vers x
   (e) En étudiant la suite $(f(x_n))$, en déduire : $f(x) = 0$.
2. On revient au cas général, c'est-à-dire qu'on retire l'hypothèse $f(0) = f(1) = 0$. Soit g la fonction affine telle que $f(0) = g(0)$ et $f(1) = g(1)$, soit $h = f(g)$.
   (a) En utilisant le résultat de la partie précédente, montrer que h est la fonction nulle.
   (b) En déduire que dans le cas général, f est une fonction affine.

Synthèse : Réciproquement, montrer que **toutes les fonctions affines sont solutions du problème étudié.**