

Feuille d'exercices nr6

Exercice 6 (Fonction réciproque - courbe). Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$

$$x \longmapsto \frac{2}{3x-1}$$

1. Étudier les variations et les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

f est dérivable : $\forall x \neq \frac{1}{3}, f'(x) = \frac{-2}{(3x-1)^2} < 0$

Ainsi, f est décroissante sur $] -\infty; \frac{1}{3}[$ et décroissante sur $] \frac{1}{3}; +\infty[$. On a le tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	—		—
$f(x)$	0 $\searrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\searrow$ 0

2. Tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé

Il faut juste que ça ressemble à la courbe de la fonction inverse, avec une asymptote verticale en $\frac{1}{3}$

3. Montrer que f est bijective.

Sur $] -\infty; \frac{1}{3}[$, f est continue et strictement décroissante donc $f(]-\infty; \frac{1}{3}[) = \mathbb{R}_-$ et sur $] \frac{1}{3}; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante donc $f(] \frac{1}{3}; +\infty[) = \mathbb{R}_+$. On en déduit que tous les réels différents de 0 ont un et un seul antécédent, d'où : f est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ dans $\mathbb{R}^*$.

4. Par le calcul, donner une expression de f^{-1}

Soit $y \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{2}{3x-1} \\ &\iff (3x-1)y = 2 \\ &\iff 3yx = 2 + y \\ &\iff x = \frac{2+y}{3y} = \frac{1}{3} + \frac{2}{y} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $y \in \mathbb{R}^*, f^{-1}(y) = \frac{1}{3} + \frac{2}{y}$

5. Tracer de même l'allure de la courbe de f^{-1} dans le même repère

Il faut de même une courbe qui ait l'allure de la fonction inverse ($\times 2$ donc dilatée verticalement) et décalée de $\frac{1}{3}$ vers le haut

6. Tracer la droite d'équation $y = x$ et vérifier (à l'œil nu) que les deux courbes sont bien symétriques l'une de l'autre par rapport à cette droite.

Exercice 8. On considère la fonction f définie par $f(x) = -2 \frac{xe^x - 1}{e^x - 1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.

f est définie pour tout x tel que $e^x - 1 \neq 0$, i.e. $x \neq 0$: l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$

2. Étudier le signe de $e^x - x$.

Posons $g : x \mapsto e^x - x$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x , $g'(x) = e^x - 1$ donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$: g admet un minimum en 0, égal à $g(0) = e^0 - 0 = 1$. Ainsi, g est positive sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x \geq 0$

3. En déduire les variations de f .

f est dérivable sur son ensemble de définition avec pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 \frac{(e^x + xe^x)(e^x - 1) - e^x(xe^x - 1)}{(e^x - 1)^2} \\ &= -2 \frac{e^{2x} + xe^{2x} - e^x - xe^x - xe^{2x} + e^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= -2 \frac{e^x(e^x - x)}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

Or, $-2 < 0$ et pour tout $x \neq 0$, $e^x > 0$, $(e^x - 1)^2 > 0$. Ainsi, $f'(x)$ est du signe opposé à $e^x - x$ et d'après la question précédente, f' est négative : f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Remarque : f n'est pas *ridécroissante* sur $\mathbb{R}$ (pas définie en 0) ni *ridécroissante* sur $\mathbb{R}^*$ (qui n'est pas un intervalle !)

4. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

C'est-à-dire : la limite de f en $+\infty$, en $-\infty$, et les limites à gauche et à droite en 0.

En $+\infty$: $f(x) = -2 \frac{e^x(x - e^{-x})}{e^x(1 - e^{-x})} = -2 \frac{x - e^{-x}}{1 - e^{-x}}$. Ainsi, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

En $-\infty$: $e^x - 1 \rightarrow -1$ et $xe^x - 1 \rightarrow -1$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -2$

En 0^+ : $xe^x - 1 \rightarrow -1$ donc $-2(xe^x - 1) \rightarrow 2$. Par ailleurs, $e^x - 1 \rightarrow 0^+$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$

En 0^- : de même, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty$

5. Montrer que la courbe de f admet trois asymptotes dont on déterminera les équations.

D'après la question précédente, f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = -2$. Il reste à déterminer l'équation d'une asymptote oblique en $+\infty$.

En utilisant les résultats de l'exercice précédent, cherchons la limite en $+\infty$ de $\frac{f(x)}{x} = -2 \frac{xe^x - 1}{x(e^x - 1)} = -2 \frac{xe^x(1 - \frac{1}{xe^x})}{xe^x(1 - \frac{1}{e^x})} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -2$

Ainsi, si f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = ax + b$, alors $a = -2$

Finalement, cherchons la limite de $f(x) + 2x = -2 \frac{xe^x - 1}{e^x - 1} + 2x = -2 \left(\frac{xe^x - 1 - x(e^x - 1)}{e^x - 1} \right) = -2 \frac{x - 1}{e^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Ainsi, f admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = -2x$

6. Étudier les positions relatives de la courbe et de l'asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$.

On cherche donc à étudier le **signe** de $f(x) - (-2x)$: $f(x) + 2x = -2 \frac{x-1}{e^x-1}$. Quand $x \geq 1$, $x - 1 \geq 0$ et $e^x - 1 \geq 0$ donc $f(x) + 2x \leq 0$: f est **au-dessous** de son asymptote.

7. Tracer le graphe de f .

Exercice 9. 1. Montrer que l'équation $x^5 = x^2 + 2$ a au moins une solution sur $]0, 2[$.

Posons $f : x \mapsto x^5 - x^2 - 2$. f est continue sur $\mathbb{R}$ comme polynôme et $f(0) = -2$, $f(2) = 2^5 - 2^2 - 2 = 32 - 6 = 26$. Ainsi, par TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $]0, 2[$.

2. Montrer que le polynôme $x^3 + 2x - 1$ a une unique racine qui appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

Posons $g : x \mapsto x^3 + 2x - 1$. g est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 + 2 > 0$. Ainsi, g est strictement croissante sur $]0, 1[$ et $g(0) = -1$, $g(1) = 2$ donc g admet une unique racine sur $]0, 1[$

3. Montrer que l'équation $x^2(\cos x)^5 + x \sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution réelle.

Posons $h : x \mapsto x^2(\cos x)^5 + x \sin(x) + 1$. h étant continue comme somme et produit de fonctions continues, il suffit de trouver deux réels où h est de signe différent. Par exemple, $h(0) = 1$ et $h(\pi) = -\pi^2 + 1 < 0$. Ainsi, $h(x) = 0$ admet au moins une solution entre $-\pi$ et 0

Exercice 10 (Démonstration du TVI par dichotomie). Soient $a < b$ deux réels et f continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. On construit deux suites avec : $a_0 = a$, $b_0 = b$ et le phénomène suivant : on construit $m = \frac{a_n + b_n}{2}$. Si $f(m) < 0$, on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$. Si $f(m) \geq 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) \geq 0$

Par récurrence :

Initialisation : pour $n = 0$, $a_0 = a$ et $f(a) < 0$ et $b_0 = b$ et $f(b) > 0$. La propriété est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) \geq 0$.

Raisonnons par disjonction de cas.

Si $f(m) < 0$, $a_{n+1} = m$ et donc $f(a_{n+1}) < 0$. Par hypothèse de récurrence, $f(b_{n+1}) = f(b_n) \geq 0$. **Si** $f(m) \geq 0$, $b_{n+1} = m$ et $f(b_{n+1}) \geq 0$. Par hypothèse de récurrence, $f(a_{n+1}) = f(a_n) < 0$. Ainsi, la récurrence est établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) \geq 0$

2. Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes

Montrons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$. Cela se montre par récurrence avec : si $a_n \leq b_n$, alors $a_n \leq m \leq b_n$.

Montrons maintenant que la suite (a_n) est croissante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a deux cas : soit $a_{n+1} = a_n$, soit $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ avec $b_n \geq a_n$, et donc $a_{n+1} \geq a_n$.

De même, on montre aisément que la suite (b_n) est décroissante.

Par ailleurs, par récurrence, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$:

Initialisation : pour $n = 0$, $b_0 - a_0 = b - a = \frac{b-a}{2^0}$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Alors,

si $f(m) < 0$, $a_{n+1} = m$ et donc $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n \times 2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$

si $f(m) \geq 0$, $b_{n+1} = m$ donc $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n \times 2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$

Ainsi, la récurrence est établie.

Finalement, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

3. Conclure.

D'après le théorème des suites adjacentes, (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite ℓ . Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) < 0$, alors par continuité de f , $f(a_n) \rightarrow f(\ell)$ donc $f(\ell) \leq 0$. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(b_n) \geq 0$ et $f(b_n) \rightarrow f(\ell)$ par continuité, et donc $f(\ell) \geq 0$. Ainsi, $f(\ell) = 0$ et **on a montré le théorème des valeurs intermédiaires.**

Remarque : cette preuve a l'avantage sur celle du cours d'être effective : ça donne une manière pour trouver une valeur approchée d'un point où f s'annule (cf question suivante). Par ailleurs, on dirait qu'on n'utilise pas le théorème de la borne supérieure, mais on utilise le théorème des suites adjacentes, montré à partir du théorème de la limite monotone donc du théorème de la borne supérieure, qui est quand même caché derrière tout ça.

4. Pour $f : x \mapsto x^2 - 2$ sur $[1; 2]$, adapter en un script Python donnant une valeur approchée de $\sqrt{2}$

```
def valeur_approchee(epsilon):
    a = 1
    b = 2
    while b-a > epsilon :
        m = (a+b)/2
        if m**2 - 2 < 0 :
            a = m
        else:
            b = m
    return (a,b)
```

Remarque : essayer de faire fonctionner cette fonction sur vos ordi, avec différentes valeurs de epsilon !

Exercice 11 (Max de fonctions continues). Montrer par récurrence que si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions continues, alors $\max(f_1, \dots, f_n)$ est une fonction continue.

Initialisation : pour 2 fonctions, ça fait partie du cours.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour toutes n fonctions continues, le maximum de ces fonctions soit une fonction continue. Soient $f_1, \dots, f_{n+1}$ des fonctions continues sur un même intervalle I . Alors,

$$\max(f_1, \dots, f_{n+1}) = \max(\max(f_1, \dots, f_n), f_{n+1})$$

Par hypothèse de récurrence, $\max(f_1, \dots, f_n)$ est une fonction continue, et de même pour f_{n+1} donc par propriété du cours (qui correspond à $n = 2$), $\max(\max(f_1, \dots, f_n), f_{n+1})$ est continue sur I . La récurrence est établie.

Exercice 12 (Caractérisation séquentielle de la limite). *Hors programme, mais instructif, pour manipuler les définitions.* En raisonnant par l'absurde, démontrer que si pour toute suite (x_n) vérifiant $x_n \rightarrow x$, $(f(x_n)) \rightarrow f(x)$, alors f est continue en x .

Soit f une fonction définie sur I et $x \in I$. Supposons par l'absurde que toutes les suites $(x_n) \in I^n$ vérifiant $x_n \rightarrow x$ vérifient aussi $f(x_n) \rightarrow f(x)$ et que $f(x)$ est discontinue en x , i.e. : $f(y)$ ne converge pas vers $f(x)$ quand $y \rightarrow x$, i.e. :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists y \in I, |y - x| \leq \alpha \text{ et } |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prenons $\alpha_n = \frac{1}{n} : \exists y_n \in I, |y_n - x| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(y_n) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Puisque $x - \frac{1}{n} \leq y_n \leq x + \frac{1}{n}$, par théorème des gendarmes, $y_n \rightarrow x$. Par hypothèse, on a donc $f(y_n) \rightarrow f(x)$. Ainsi, $f(y_n) - f(x) \rightarrow 0$. Ceci est en contradiction avec $|f(y_n) - f(x)| \geq \varepsilon$, donc f est continue en x .

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

On cherche à montrer que toutes les valeurs de f sont égales entre elles, ou égales à une constante (c'est deux stratégies différentes : prendre x et y et montrer $f(x) = f(y)$, ou trouver une constante c telle que pour tout x , $f(x) = c$). Ici, on va utiliser la deuxième stratégie, avec $c = f(0)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons : $f(x) = f(0)$. Par hypothèse, $f(x) = f(2 \times \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})$. On montre alors par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(x) = f(\frac{x}{2^n})$.

Puisque $\frac{x}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, alors par continuité de f , $f(\frac{x}{2^n}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(0)$. Par ailleurs, $f(\frac{x}{2^n}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$.

Par unicité de la limite, $f(x) = f(0)$ et donc f est une fonction constante.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

On voit les mots « continue » et « bornée » : on doit penser au théorème des bornes, mais où/comment l'utiliser ?

Traduisons les hypothèses : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|g(y)| \leq M$. En particulier pour les images par la fonction $f : \forall x \in \mathbb{R}, |g(f(x))| \leq M$ donc $g \circ f$ est bornée. Ici, on n'a pas eu besoin du théorème des bornes, ni de la continuité de f .

Par ailleurs, on a écrit que pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) \in [-M; M]$. Or, par théorème des bornes, sur le segment $[-M; M]$, la fonction continue f est bornée : il existe a, b tels que pour tout $y \in [-M; M], a \leq f(y) \leq b$. En particulier pour les images de g qui sont dans ce segment : pour tout $x \in \mathbb{R}, a \leq f(g(x)) \leq b$ donc $f \circ g$ est bornée.

Exercice 17. Montrer qu'une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$ est constante.

Comme à l'exercice 14, il faut trouver une constante candidate à être la valeur que prend f partout. Notons donc ℓ la limite de f en $+\infty$ et $T > 0$ une période de f . Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}, f(x) = f(x + nT)$.

Quand $n \rightarrow +\infty, x + nT \rightarrow +\infty$. Ainsi, par composition, $f(x + nT) \xrightarrow{\ell} \ell$ et $f(x + nT) \rightarrow f(x)$: par unicité de la limite, $f(x) = \ell$ et donc f est constante.

Exercice 18 (Équation différentielle et unicité de la limite). Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f = 2f'$. On suppose que f a une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$.

1. Montrer que f' a une limite en $+\infty$

Puisque $f' = \frac{1}{2}f$ et que f a une limite, alors f' a une limite $(f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \frac{\ell}{2})$

2. Montrer que si f et f' ont une limite en $+\infty$ alors f' tend vers 0

Supposons par l'absurde que f' a une limite ℓ' différente de 0, sans restriction de généralité $\ell' > 0$. Alors il existe x_0 tel que pour tout $x \geq x_0, f'(x) > \frac{\ell'}{2}$ et donc pour tout $x \geq x_0, f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \geq f(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{\ell'}{2} dt = f(x_0) + \frac{\ell'}{2}(x - x_0)$. Alors, quand $x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty$, ce qui est absurde. Ainsi, $\lim f'(x) = 0$.

3. En déduire la limite de f en $+\infty$

D'après les deux questions précédentes, $\lim f'(x) = \frac{1}{2} \lim f(x) = 0$ donc $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$