Théorème de la bijection - démonstration

Soit I un intervalle et f une fonction strictement monotone et continue sur I. Alors

$f : I \to f(I)$ est bijective et $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue, strictement monotone de même sens de variation que f

Démonstration

On se place dans ce qui suit dans le cas f strictement croissante.

Bijectivité

Surjectivité : Ici, l'ensemble d'arrivée de f est égal à l'ensemble image, il n'y a rien à démontrer
Injectivité : La preuve d'injectivité n'utilise que la stricte croissance. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \neq x'$ avec $f(x) = f(x')$. Sans restriction de généralité, supposons $x < x'$.
Alors, par stricte croissance de f, $f(x) < f(x')$. C'est une contradiction.
Conclusion : f est injective et surjective donc bijective, l'application $f^{-1} : f(I) \to I$ est bien définie.

Croissance

Soient y, y' dans $f(I)$ vérifiant $y < y'$. Soient $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$. Alors, $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. Si par l'absurde, $x' \leq x$, alors la croissance stricte de f implique $f(x') \leq f(x)$, c'est-à-dire $y' \leq y$. C'est une contradiction : on a alors $x < x'$, donc f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$.

Continuité

Remarque : en fait, cette partie est assez technique. Pas besoin de savoir la refaire par cœur.
Soit $y_0 \in f(I)$. On pose $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Montrons que f^{-1} est continue en y_0, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y \in f(I), |y - y_0| < \alpha \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Si x_0 est une extrémité de I, il existe $0 < \alpha < \varepsilon$ tel que $[x_0; x_0 + \alpha[$ ou $]x_0 - \alpha; x_0]$ soit inclus dans I. Sinon, il existe α tel que $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ soit inclus dans I.
On se restreint pour le moment au cas où x_0 n'est pas une extrémité de I.

Alors, $x_0 - \alpha < x_0 < x_0 + \alpha$ implique, par stricte croissance de f (tous ces éléments étant dans I) que :

$$f(x_0 - \alpha) < y_0 < f(x_0 + \alpha)$$

On pose alors $\eta = \min(f(x_0) + \alpha - y_0, y_0 - f(x_0 - \alpha))$. Pour $y \in]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$,

$$f(x_0 - \alpha) < y < f(x_0 + \alpha)$$

d'où

$$x_0 - \varepsilon < x_0 - \alpha < f^{-1}(y) < x_0 + \alpha < x_0 + \varepsilon$$

Ainsi, $|y - y_0| < \eta \Rightarrow |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$, ce qui garantit la **continuité de f^{-1} en y_0**
Si maintenant x_0 est une extrémité de I, on fait pareil avec seulement $x_0 + \alpha$ ou $x_0 - \alpha$.

Cas f décroissante

Si f est décroissante, la bijectivité se montre de la même façon. Pour le reste, posons $g = -f$. Alors, g est continue (opérations élémentaires) et est strictement croissante. Ainsi, d'après le théorème dans le cas croissant, g est bijective, de réciproque continue et strictement croissante. De plus, $y = f(x) \Leftrightarrow -y = -f(x) \Leftrightarrow -y = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(-y)$. On a ainsi montré que $f^{-1}(y) = g^{-1}(-y)$, c'est-à-dire que $f^{-1} = g \circ (-id)$. Comme composée de fonctions continues, f^{-1} est continue et comme composée d'une fonction strictement croissante et d'une fonction strictement décroissante, f^{-1} est strictement décroissante.

Ce qu'on peut/qu'il faut retenir

1. Le théorème ! Et que la force de ce théorème (et ce qui était difficile à démontrer) c'est la continuité de la réciproque.
2. Les preuves de bijectivité et de croissance doivent être connues
3. Pour montrer dans le cas décroissant : plutôt que de tout ré-écrire, on applique ce qu'on a démontré à $-f$
4. Sur la preuve de continuité : la preuve est en fait plus technique qu'il n'y paraît, simplement parce qu'il faut distinguer plusieurs cas ! Chaque cas est raisonnable, essayer de bien comprendre la preuve sur un dessin. En revanche, la preuve étant un peu longue, elle n'est pas exigible.