

Devoir Maison n°5 - Autour de la continuité

APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **k -lipschitzienne** si :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

1. Montrer que toute fonction k -lipschitzienne est **continue** sur $\mathbb{R}$

Soit f une fonction k -lipschitzienne sur I . Soit $y \in I$. Montrons : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow y} f(y)$.

- **Méthode 1** : avec le théorème des gendarmes. Quand $x \rightarrow y$, $|x - y| \rightarrow 0$. Par théorème des gendarmes, puisque $0 \leq |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, alors $|f(x) - f(y)| \rightarrow 0$ i.e. $f(x) \rightarrow f(y)$
- **Méthode 2** : en revenant à la définition. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$. Alors, pour $x \in I$ tel que $|x - y| \leq \alpha$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \leq k\alpha \leq \varepsilon$. Ainsi, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow y} f(y)$

On en conclut que f est continue en y , et donc sur I tout entier.

2. Montrer que la réciproque est fautive en montrant que la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est continue mais pas lipschitzienne.

La fonction racine carrée est clairement continue (fonction de référence) sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, supposons par l'absurde qu'elle soit lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. Alors, il existe $k > 0$ tel que, en prenant $y = 0$, on ait pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x} \leq kx$, i.e. $k \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Or, lorsque $x \rightarrow 0$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$, donc cette fonction n'est pas majorée, ce qui est en contradiction avec l'inégalité précédente. Ainsi, la fonction racine carrée n'est pas lipschitzienne.

3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction k -lipschitzienne avec $k < 1$ et $f(0) = 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite réelle déterminée par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq k^n |a|$

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = a$ donc $|u_0| = k^0 |a|$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $|u_n| \leq k^n |a|$. Alors, puisque f est k -lipschitzienne, $|f(u_n) - f(0)| \leq k|u_n - 0|$, i.e. $|u_{n+1}| \leq k|u_n|$ et par hypothèse de récurrence : $|u_{n+1}| \leq k \times k^n |a| = k^{n+1} |a|$. La récurrence est établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq k^n |a|$

- (b) En déduire : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Jusque là, on n'a pas utilisé $k < 1$. Mais puisque $k < 1$, alors $k^n \rightarrow 0$ et par théorème des gendarmes, $|u_n| \rightarrow 0$, i.e. $u_n \rightarrow 0$.

UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE ET LE RAISONNEMENT PAR ANALYSE-SYNTHESE

On cherche toutes les fonctions **continues** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

On fait ce que l'on appelle un **raisonnement par analyse-synthèse** : dans une première partie, appelée **analyse**, nous allons chercher des conditions nécessaires pour qu'une fonction f soit solution du problème, en cherchant des conditions les plus contraignantes possibles. Dans une deuxième partie, appelée **synthèse**, nous vérifierons que les conditions trouvées dans l'analyse sont en fait des conditions nécessaires **et suffisantes**.

Analyse : Soit f une fonction solution du problème précédent.

1. Supposons dans un premier temps que $f(0) = f(1) = 0$.

- (a) Montrer : pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $f(p) = 0$

Par récurrence double :

Initialisation : Pour $p = 0$ et $p = 1$, on a supposé $f(0) = f(1) = 0$

Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $f(p) = f(p+1) = 0$. Montrons que $f(p+2) = 0$.

Par définition de f , $f(p+1) = f\left(\frac{p+(p+2)}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(p) + f(p+2))$ i.e. par hypothèse de récurrence :

$$0 = \frac{1}{2}(0 + f(p+2))$$

On en déduit immédiatement : $f(p+2) = 0$ et la récurrence est établie.

Conclusion : pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $f(p) = 0$

- (b) Montrer que pour tout entier
- $p \in \mathbb{Z}$
- ,
- $f(p) = 0$

La propriété a déjà été démontrée pour tout $p \in \mathbb{N}$. Soit p un entier **négalif**. Alors, par la question précédente, $f(-p) = 0$ puisque $-p$ est un entier positif. Par ailleurs,

$$0 = f(0) = f\left(\frac{p + (-p)}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(p) + f(-p)) = \frac{1}{2} \times f(p)$$

Ainsi, $f(p) = 0$ et la propriété est donc vraie pour tous les entiers relatifs.

- (c) Montrer que pour tout
- $p \in \mathbb{Z}$
- et pour tout
- $n \in \mathbb{N}$
- ,
- $f\left(\frac{p}{2^n}\right) = 0$

Soit $p \in \mathbb{Z}$. Raisonnons par récurrence sur n .

Initialisation : pour $n = 0$, $f(p) = 0$ et $\frac{p}{2^0} = p$ donc la propriété est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f\left(\frac{p}{2^n}\right) = 0$. Alors,

$$f\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{\frac{p}{2^n} + 0}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{p}{2^n}\right) + f(0)\right) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0$$

La récurrence est établie.

- (d) Soit
- $x \in \mathbb{R}$
- . Pour tout
- $n \in \mathbb{N}$
- , on pose
- $x_n = \lfloor \frac{2^n x}{2^n} \rfloor$
- . Démontrer que
- (x_n)
- converge vers
- x

Par définition de la partie entière, $2^n x - 1 < \lfloor 2^n x \rfloor \leq 2^n x$ et donc (puisque $2^n > 0$) : $\frac{2^n x - 1}{2^n} \leq x_n \leq \frac{2^n x}{2^n}$, i.e. $x - \frac{1}{2^n} \leq x_n \leq x$. Puisque $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, par théorème des gendarmes, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$

- (e) En étudiant la suite
- $(f(x_n))$
- , en déduire :
- $f(x) = 0$
- .

D'après la question c, puisque $\lfloor 2^n x \rfloor$ est un entier et que 2^n est une puissance de 2, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 0$. Par continuité de f , $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Ainsi, par unicité de la limite, $f(x) = 0$. On en déduit que la fonction f est identiquement nulle.

2. On revient au cas général, c'est-à-dire qu'on retire l'hypothèse $f(0) = f(1) = 0$. Soit g la fonction affine telle que $f(0) = g(0)$ et $f(1) = g(1)$, soit $h = f - g$.

- (a) En utilisant le résultat de la partie précédente, montrer que
- h
- est la fonction nulle.

Il suffit de montrer que h vérifie les deux conditions :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, h\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(h(x) + h(y))$
- $h(0) = h(1) = 0$

Ainsi, le résultat démontré en première partie s'applique à h .

Pour le premier point : soient x, y des réels. Notons de plus a et b des réels tels que $g : t \mapsto at + b$. Alors,

$$\begin{aligned} h\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{x+y}{2}\right) - g\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) - a \times \frac{x+y}{2} - b \\ &= \frac{1}{2}(f(x) + f(y) - a(x+y) - 2b) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) - ax - b + f(y) - ay - b) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) - g(x) + f(y) - g(y)) \\ &= \frac{1}{2}(h(x) - h(y)) \end{aligned}$$

Pour le deuxième point, par définition, $h(0) = f(0) - g(0) = 0$ et $h(1) = f(1) - g(1) = 0$ puisque g a été choisie pour que $f(0) = g(0)$ et $f(1) = g(1)$

Ainsi, h est la fonction nulle.

- (b) En déduire que dans le cas général,
- f
- est une fonction affine.

Puisque $f - g = 0$, alors $f = g$ qui est une fonction affine.

Synthèse : Réciproquement, montrer que **toutes les fonctions affines sont solutions du problème étudié.**

Soit $f : t \mapsto at + b$ une fonction affine. Alors, f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tous réels x, y ,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= a \times \frac{x+y}{2} + b \\ &= \frac{1}{2}(a(x+y) + 2b) \\ &= \frac{1}{2}(ax + b + ay + b) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) \end{aligned}$$

Ainsi, f est une solution du problème. On a ainsi montré que les fonctions affines sont exactement les fonctions qui «respectent la moyenne», i.e. « f de la moyenne c'est la moyenne des f »