Feuille d'exercices n°8

Premiers calculs, propriétés du cours

Exercice 1. Calculer :

1. $3\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 4 & -2 & 0\\ -4 & 0 & -1\end{pmatrix}$

Écrire les transposées des matrices obtenues.

Exercice 2. On pose $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}-2 & 5\\ 5 & 0\end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -1 & -4 & 0\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$

Quels produits de deux de ces matrices peut-on réaliser ?

Puissances d'une matrice carrée, suites récurrentes

Exercice 3. Conjecturer l'expression de A^n en fonction de n et démontrer la conjecture par récurrence.

1. $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -6 & 5\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ -6 & 3\end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix}3 & -1\\ 6 & -2\end{pmatrix}$.

1. Calculer B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer des réels α et β tels que $A = \alpha B + \beta C$.
3. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

◇ **Exercice 5** (Avec un polynôme annulateur)**.** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $X_n = \begin{pmatrix}u_n\\ u_{n+1}\\ u_{n+2}\end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n et d'une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ qu'on déterminera.
2. Exprimer alors X_n en fonction de n, A et X_0. On justifiera le résultat.
3. On pose $B = A - I_3$. Calculer B^3.
4. En déduire A^n.
5. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 6 (En diagonalisant)**.** On note $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

1. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}
2. Calculer PDP^{-1}
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une écriture de D^n
4. **Démontrer que, pour tout** $n \geqslant 1, A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,
$$A^n = \begin{pmatrix}-2^n + 2 & 2^n - 1\\ -2^{n+1} + 2 & 2^{n+1} - 1\end{pmatrix}$$
5. On considère (u_n) et (v_n) les deux suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et $\begin{cases} u_{n+1} &= v_n\\ v_{n+1} &= -2u_n + 3v_n\end{cases}$.

   On pose, pour $n \geqslant 0$, le vecteur $U_n = \begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}$. Écrire une relation qui lie U_{n+1}, U_n et A.

6. En déduire une expression explicite de u_n et de v_n pour tout $n \geqslant 0$.
7. *Remarque :* Obtenir le même résultat en conjecturant sur u_1, u_2, v_1, v_2 puis par récurrence.

Exercice 7 (En diagonalisant - chaîne de Markov)**.** On considère les suites (a_n), (b_n) et (c_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_1 = b_1 = c_1 = \frac{1}{3}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left\{ \begin{array}{lllllll} a_{n+1} & = & a_n & + & \frac{b_n}{2} & + & \frac{c_n}{3} \\ b_{n+1} & = & \frac{b_n}{2} & + & \frac{c_n}{3} & & \\ c_{n+1} & = & \frac{c_n}{3} & & & & \end{array} \right.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n et d'une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ qu'on déterminera.
2. Exprimer X_n en fonction de n, A et X_1.
3. (a) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}, puis $D = P^{-1}AP$.
   (b) Exprimer alors D^n, puis A^n, en fonction de n.
4. Déduire des questions précédentes l'expression de b_n et c_n en fonction de n.
5. Montrer que la suite $(a_n + b_n + c_n)$ est constante. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
6. Calculer les limites de a_n, b_n et c_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Ce genre de suites apparaît naturellement dans un cadre probabiliste.

Inversibilité

Exercice 8. Étudier l'inversibilité des matrices suivantes. Lorsque la matrice est inversible, déterminer son inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -7 & 7 \end{pmatrix}$
7. $G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

♢ **Exercice 9** (Valeurs propres)**.** Déterminer les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 10 (Inversibilité avec un polynôme annulateur)**.**

♢ 1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 11. Soit a_1, a_2, a_3 des réels non nuls et $M = \begin{pmatrix} 1 & a_1/a_2 & a_1/a_3 \\ a_2/a_1 & 1 & a_2/a_3 \\ a_3/a_1 & a_3/a_2 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer M^2 et en déduire que M n'est pas inversible.

En dimension quelconque

Exercice 12. Soit $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tMM$ est bien définie et qu'elle est symétrique.

Exercice 13. Soient A et B deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = 0$. Montrer que ni A ni B n'est inversible.

♢ **Exercice 14.** Soit $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale de coefficients diagonaux deux à deux distincts. Déterminer l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})$ qui commutent avec D.

Exercice 15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $(i,j) \in [|1;n|]^2, A_{ij} = \frac{i}{j}$

1. En utilisant la formule du produit matriciel, déterminer une expression du coefficient (i,j) de A^2
2. Montrer que $A^2 = nA$
3. Déterminer une expression de A^n

♢ **Exercice 16.**
On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible, calculer son inverse.

Exercice 17. Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Écrire une expression du coefficient (i,j) de M
2. Calculer M^2 et l'exprimer en fonction de M et I.
3. En déduire que M est inversible et exprimer son inverse en fonction de M et I.

Équations

Exercice 18. Résoudre les équations matricielles suivantes.

1. $5\left(X - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right) - \left(2X + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$
2. $\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 19. Trouver toutes les matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ dont le carré est égal à :

1. La matrice identité
2. La matrice nulle
3. La matrice A

♢ **Exercice 20.** Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Autres thèmes

Exercice 21 (Nilpotence). *Une matrice carrée M est dite nilpotente s'il existe un entier naturel k tel que $M^k = 0$.*

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer A en la somme d'une matrice diagonale D et d'une matrice nilpotente N, en vérifiant $DN = ND$.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
3. Peut-on étendre ce résultat à $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 22 (Matrices stochastiques). *Une matrice carrée est dite stochastique si tous ses coefficients sont positifs et que la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1*

1. Donner des exemples (variés) de matrices stochastiques de taille 2 ou 3
2. Montrer, d'abord en taille 2 puis en général, que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

Exercice 23 (Matrices à diagonale dominante - lemme d'Hadamard). Soit $n > 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [|1, n|]$,

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |aij|$$

Montrer par l'absurde que A est inversible.

Indication : Considérer une matrice colonne $X \neq 0$ telle que $AX = 0$ et i_0 un indice tel que $|X_{i_0}|$ soit maximal.