

Démonstration par analyse-synthèse

Ce mode de raisonnement, proche de la double implication, permet de résoudre des **équations**, des problèmes de la forme «Montrer qu'il existe un(e) unique (réel / fonction / matrice...) telle que...» ou bien «Trouver tous les (réels/fonctions/matrices...) tels que...»

Rédaction : Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse : soit (...) un réel / une fonction / ... qui vérifie : ...

Après étapes de déduction, calculs, on trouve des conditions nécessaires sur cet objet.

Synthèse : vérifions que (...) est solution du problème.

Exercice Résoudre les équations : $x = \sqrt{4x-4}$, $\sqrt{2-x} = x$, $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

Exercice Montrer que toute fonction peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Reformulation : soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions (g, h) avec g paire, h impaire, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + h(x)$

Exercice Montrer que les droites d'équations $8mx + (1 + 4m^2)y + 4m = 0$, où m parcourt $\mathbb{R}$, sont toutes concourantes en un point, que l'on déterminera.

Exercice On cherche à trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Ceci s'appelle une **équation fonctionnelle** : l'inconnue ici est la fonction f .

1. **Analyse.** Soit f une fonction vérifiant l'équation.

(a) En choisissant des valeurs particulières de x et y , déterminer la valeur de $f(0)$

(b) En fixant $y = 0$, en déduire une expression de $f(x)$

2. **Synthèse** Vérifier que la fonction f définie par l'expression de la question précédente est effectivement solution du problème.

Démonstration par analyse-synthèse

Ce mode de raisonnement, proche de la double implication, permet de résoudre des **équations**, des problèmes de la forme «Montrer qu'il existe un(e) unique (réel / fonction / matrice...) telle que...» ou bien «Trouver tous les (réels/fonctions/matrices...) tels que...»

Rédaction : Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse : soit (...) un réel / une fonction / ... qui vérifie : ...

Après étapes de déduction, calculs, on trouve des conditions nécessaires sur cet objet.

Synthèse : vérifions que (...) est solution du problème.

Exercice Résoudre les équations : $x = \sqrt{4x-4}$, $\sqrt{2-x} = x$, $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

Exercice Montrer que toute fonction peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Reformulation : soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions (g, h) avec g paire, h impaire, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + h(x)$

Exercice Montrer que les droites d'équations $8mx + (1 + 4m^2)y + 4m = 0$, où m parcourt $\mathbb{R}$, sont toutes concourantes en un point, que l'on déterminera.

Exercice On cherche à trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Ceci s'appelle une **équation fonctionnelle** : l'inconnue ici est la fonction f .

1. **Analyse.** Soit f une fonction vérifiant l'équation.

(a) En choisissant des valeurs particulières de x et y , déterminer la valeur de $f(0)$

(b) En fixant $y = 0$, en déduire une expression de $f(x)$

2. **Synthèse** Vérifier que la fonction f définie par l'expression de la question précédente est effectivement solution du problème.