

IX. SEMAINE 9 : 24-28 NOVEMBRE

Contenus :

1. Matrices, ensembles de matrices $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sommes, multiplications par des réels, transposées de matrices.
2. Produit de matrices. La formule du coefficient i, j de la matrice AB doit être connue. Savoir faire en pratique.
3. Propriétés des opérations matricielles : commutativité de la somme, associativité de la somme et du produit ... mais **attention** le produit matriciel n'est pas commutatif : il faut connaître au moins un exemple! Pour des matrices, $AB = 0$ **n'implique pas** $A = 0$ ou $B = 0$.
4. Notion de puissance d'une matrice carrée. Démonstrations par récurrence, puissances de matrices diagonales, formule du binôme.
5. Matrices symétriques, matrices antisymétriques.
6. Matrices triangulaires supérieures et inférieures.
7. Matrices inversibles : définition par l'existence d'un inverse à gauche et à droite et caractérisations (inversibilité à gauche, $AX = 0 \Rightarrow X = 0$, injectivité de $X \mapsto AX$ pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou pour $X \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$).
8. Critères d'inversibilité : aucune colonne ou ligne n'est nulle (condition nécessaire mais pas suffisante), critères pour les matrices diagonales et triangulaires.
9. Calcul d'inverse par pivot de Gauss. Calcul d'inverse à l'aide d'une relation de type : $A^2 - A + 3I = 0$.

Questions de cours :

1. Montrer (en revenant aux coefficients) que pour des matrices adaptées, $(A + B) + C = A + (B + C)$. Les matrices doivent être introduites avec leurs dimensions.
2. Définition du produit de deux matrices. Les matrices doivent être introduites avec leurs dimensions.
3. Démonstration : pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$
4. Démonstration : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et (X_n) une suite de matrices de $\mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ avec pour tout n entier $X_{n+1} = AX_n$, alors pour tout n , $X_n = A^n X_0$
5. Définition + lister (sans démonstration) des critères d'inversibilité / non inversibilité dans des cas particuliers (*définition + dimension 2, matrices diagonales, triangulaires, lignes/colonnes nulles, caractérisation avec $AX = 0 \iff X = 0$, $AX_1 = AX_2 \iff X_1 = X_2, \dots$*)
6. Inversion à la main d'une matrice 3×3