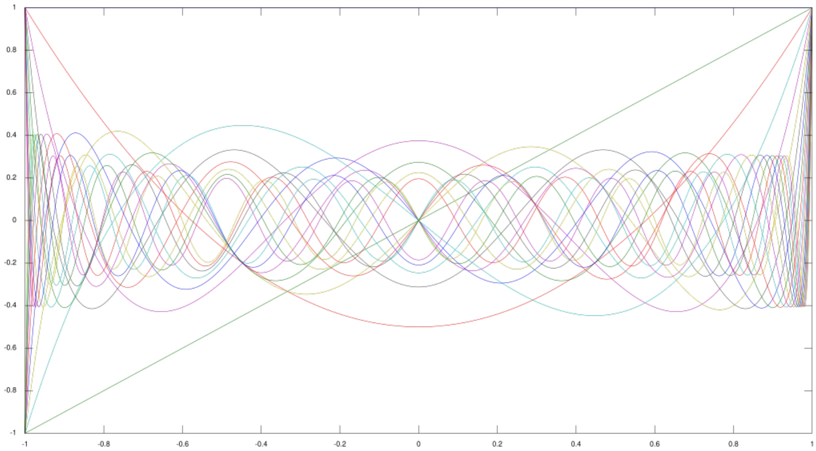
# Devoir Maison n°8 - Deux familles de polynômes

## Polynômes de Legendre



On s'intéresse à une famille de polynômes appelés **polynômes de Legendre** définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $P_n(x) = ((x^2-1)^n)^{(n)}$ (c'est-à-dire $(x^2-1)^n$ dérivé $n$ fois).

*Remarque culturelle : ces polynômes, qui sont les solutions d'une famille d'équations différentielles, sont utilisées en calcul numérique pour approximer des intégrales.*

1. Calculer $P_0, P_1, P_2$
2. Déterminer pour tout $n$ le degré de $P_n$.
3. Montrer que le coefficient dominant de $P_n$ est $\frac{(2n)!}{n!}$
4. Pour $0 \leq p \leq n$, on pose $Q_p(x) = ((x^2-1)^n)^{(p)}$. Quel est le degré de $Q_p$ ? Démontrer que $Q_p$ admet deux racines d'ordre $n-p$ et $p$ racines d'ordre 1. Toutes ces racines sont dans $[-1;1]$
5. En déduire que $P_n$ s'annule exactement en $n$ points deux à deux distincts de $]-1;1[$.
6. Quelle est la forme factorisée de $P_n$ ?

## Exercice 2 - polynômes de Tchebychev

On considère la suite $(T_n)$ de polynômes définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \end{cases}$$

*Remarque culturelle : ces polynômes sont utilisés pour l'interpolation polynômiale (faire passer une fonction polynômiale par un ensemble de points). D'autres familles de polynômes ont des applications en physique ou en calcul numérique : polynômes de Laguerre, polynôme d'Hermite, ...*

1. Expliciter $T_2$, $T_3$ et $T_4$.
2. Déterminer le coefficient dominant et le degré de $T_n$.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(nx) = T_n(\cos x)$.
4. En déduire que $T_n$ a $n$ racines distinctes, toutes dans $]-1,1[$.
5. Quelle est la forme factorisée de $T_n$ ?
6. Montrer par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (1-x^2)T_n^{(2)}(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$