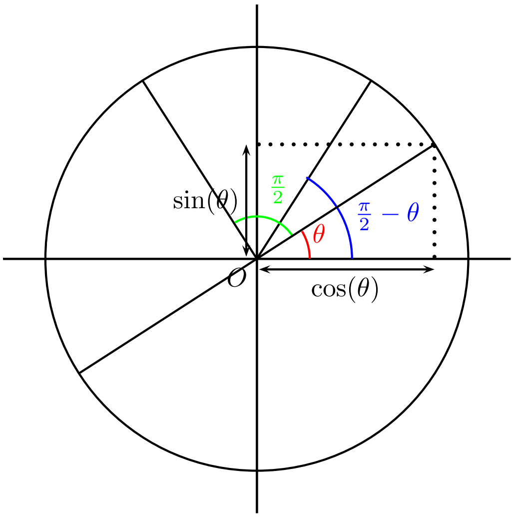
Chapitre 9 : Trigonométrie

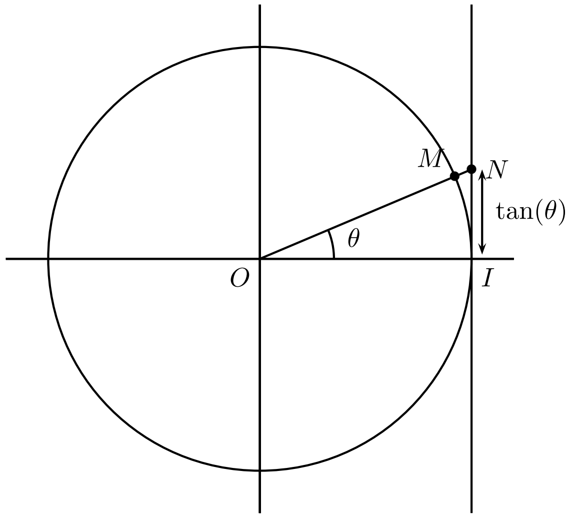
Analyse & Géométrie

I. Représentations graphiques

1. Cercle trigonométrique

Les fonction **sinus**, **cosinus** et **arctangente** et sont définies sur $\mathbb{R}$. La fonction **tangente** est définie sur $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$





Pour tout $x \in \mathbb{R}$, (sous réserve d'existence des objets)

- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\tan(-x) = -\tan(x)$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
- $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
- $\tan(x + \pi) = \tan(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
- $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$
- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

2. Cas d'égalité

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - y + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi \text{ ou } x = -y + 2k\pi)$$

$$\tan(x) = \tan(y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + k\pi)$$

Ces propriétés illustrent en particulier le fait qu'aucune de ces trois fonctions n'est injective sur son domaine de définition ! En revanche, la restriction de **tan** à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est **bijective**, ce qui permet de définir la fonction **arctangente** sur $\mathbb{R}$.

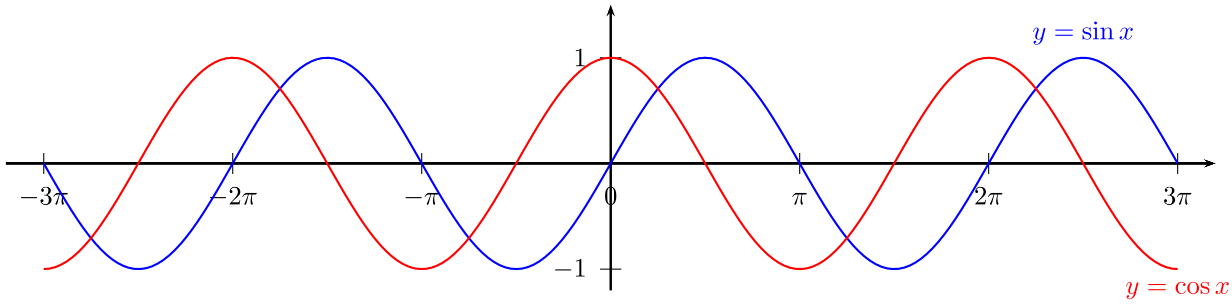
$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$$

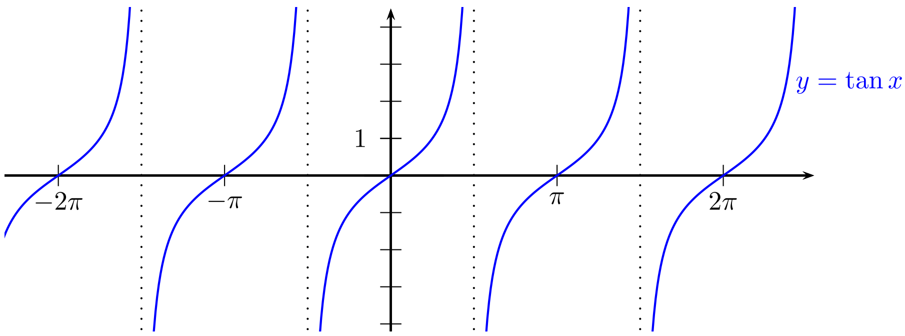
$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(x)) = x$$

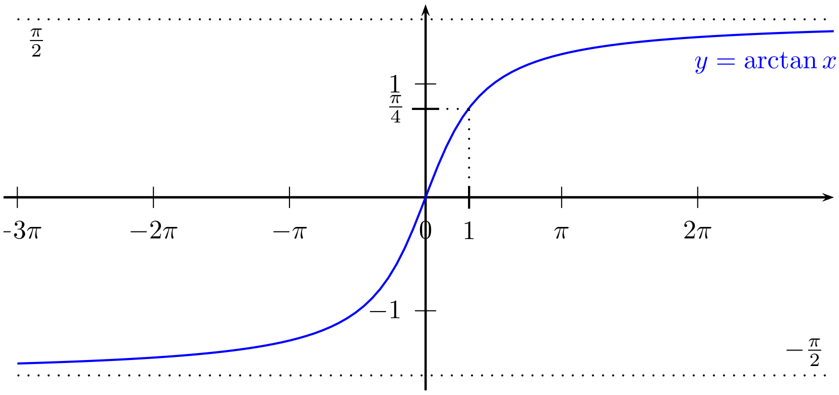
Si $x \in \mathbb{R}$,

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \arctan(\tan(x)) = x + k\pi$$

3. Graphes de fonctions



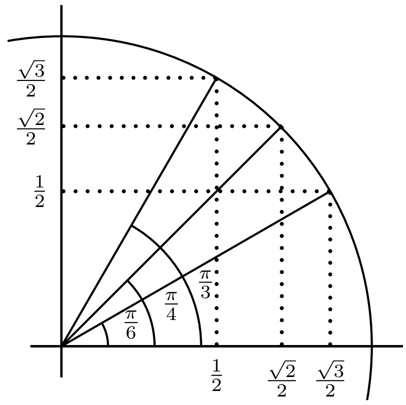




Remarque : attention aux graphiques, les axes des abscisses et des ordonnées n'ont pas la même échelle (pour pouvoir représenter plusieurs périodes sur la feuille). Il faut savoir tracer l'allure de ces courbes (avec les bonnes valeurs particulières !)

II. Valeurs particulières

Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	X



Il faut savoir en **déduire rapidement** les équivalents à $\pm\frac{\pi}{2}$
Exemples : $\cos(\frac{7\pi}{6}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
Valeurs d'arctangente à connaître :

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \arctan(0) = 0, \quad \arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}, \quad \arctan(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{\pi}{2}$$

III. Formules, calculs

1. Addition

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$

De plus, si tout est bien défini,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Cas particuliers :

$$\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2, \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \quad \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan(x)^2}$$

♡ Retenir qu'il existe des **formules pour les produits** ($\cos(\alpha)\cos(\beta)$, ...), que l'on peut retrouver à partir des formules d'addition

2. Encadrements, limites

1. L'inégalité classique :
$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \text{ et } -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$$
2. Moins évident mais utile **proche de zéro** :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leqslant x$$
3. **Limites :**

   (a) $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ (b) $\dfrac{\tan(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ (c) $\dfrac{\cos(x) - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

   On verra un peu mieux (plus précis) plus tard dans l'année : $\frac{\cos(x)-1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$

3. Dérivées

Fonction	Dérivée
$\cos$	$-\sin$
$\sin$	$\cos$
$\tan$	$\dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$
$\arctan$	$\dfrac{1}{1 + x^2}$

De droite à gauche : connaître aussi pour savoir **primitiver**