Chapitre 10 : Dérivation

Analyse 4

I. Nombre dérivé

1. Définitions

Définition 1 (Taux d'accroissement)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant les réels a et b, avec $a \neq b$. On appelle **taux d'accroissement** entre a et b la quantité

$$t_{ab}(f) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Remarque. Si f est croissante, ce taux est positif. Si f est décroissante, ce taux est négatif. Plus généralement, le taux d'accroissement indique **à quelle vitesse** f a varié entre a et b

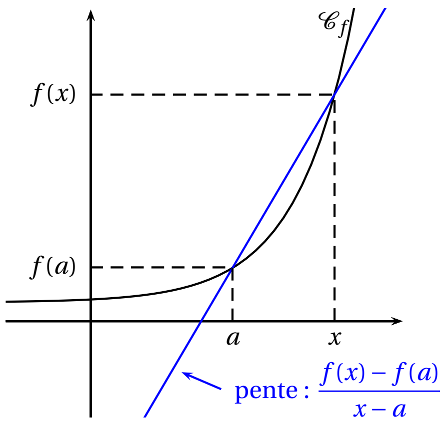
Définition 2 (Nombre dérivé)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a. On dit que f est **dérivable en** a si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

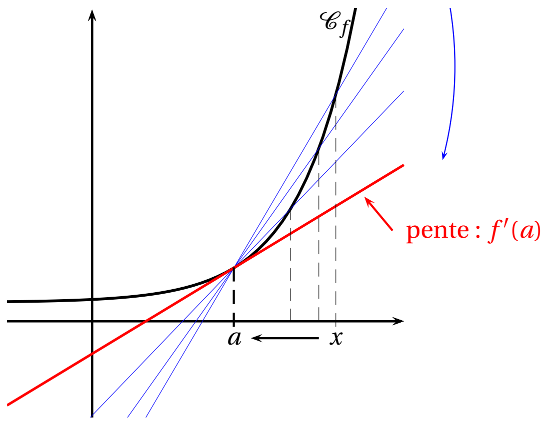
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

On note alors $f'(a) := \ell$.
Souvent, on reformule le taux d'accroissement sous la forme $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ où h a vocation à tendre vers 0

Propriété 3. Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Démonstration.





Exemples (Tout premiers exemples de calculs)**.**

- La fonction constante égale à 17 est dérivable en tout réel
- La fonction racine carrée est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

  Soit ....
  Le taux d'accroissement ....
  ....
  Pour calculer la limite, on utilise la méthode de la *quantité conjuguée*. On obtient : ....
  ....

  Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) =$ ....

- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 :
  ....
  ....
  ....

Exercice. De même, déterminer la dérivée de la fonction carré en tout réel a. On reconnaîtra une identité remarquable.

♣ *Exercice.* En utilisant une formule du TD1 (qui généralise l'identité remarquable précédente), déterminer le nombre dérivé en a de la fonction $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 4 (Dérivée à gauche, à droite)**.** Si le taux d'accroissement $t_{ax}(f)$ a une limite à droite (resp. à gauche) en a, alors on dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a. On note $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$) le nombre dérivé associé.

Exemple. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 mais est dérivable à droite et à gauche en 0

Avoir en tête l'allure de la courbe aux points de non dérivabilité des fonctions racine carrée et valeur absolue.

Remarque. La propriété analogue sur les limites nous permet d'affirmer que f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite avec $f'_g(a) = f'_d(a)$

2. Tangente

♡ **Définition 5** (Équation de la tangente)**.** Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable en a. La tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est la droite de pente $f'(a)$ passant par le point $M(a, f(a))$. Son équation est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Remarque. Rappels sur les fonctions affines pour retenir cette expression.

Exercice. Tracer un exemple de courbe d'une fonction f définie sur $]-3;+\infty[$ ayant une asymptote verticale d'équation $x = -3$, une asymptote oblique d'équation $y = 3x-2$ en $+\infty$ et vérifiant :

a	$f(a)$	$f'(a)$
-2	1	-2
-1	1	0
0	0	1

II. Fonctions dérivables sur un intervalle

1. Ensembles de fonctions dérivables

On considère dans toute la suite que les fonctions sont définies sur un **intervalle** I. Comme pour le chapitre sur la continuité, après l'étude locale, on s'intéresse à ce qu'on peut dire d'une fonction qu'on sait **globalement** dérivable. Si on n'est pas sur un intervalle : étudier sur des intervalles.

Définition 6. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$. On note alors f' la fonction qui à chaque a associe le nombre dérivé en a.

Définition 7. On dit qu'une fonction f est **continûment dérivable** si elle est dérivable et que f' est continue. On note $\mathscr{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur I

Remarque. On notera ensuite $\mathscr{C}^2$ les fonctions dont la dérivée est elle-même $\mathscr{C}^1$, et ainsi de suite par récurrence. On en reparlera dans un chapitre futur.

⚠ Continûment dérivable **ne veut pas dire** continue et dérivable : les fonctions dérivables sont aussi continues. Ainsi, « continue et dérivable »est la même chose que « dérivable »

2. Opérations

Propriété 8 (Rappels)**.** Soit I un invervalle et u, v deux fonctions définies et dérivables sur I. Soit λ un réel. Alors

1. $u + \lambda v$ est dérivable sur I et $(u+\lambda v)' = u' + \lambda v'$ (linéarité)
2. uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$
3. $\dfrac{u}{v}$ est dérivable en tout point a de I où $v(a) \neq 0$ et alors : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(a) = \dfrac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v^2(a)}$

Démonstration.

1. Soit $a \in I$. Alors, le taux d'accroissement de $u + \lambda v$ en a est :

$$\frac{(u+\lambda v)(x) - (u+\lambda v)(a)}{x-a} = \frac{u(x)-u(a)}{x-a} + \lambda \frac{v(x)-v(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} u'(a) + \lambda v'(a)$$

donc $(u+\lambda v)$ est dérivable en a de nombre dérivé $u'(a) + \lambda v'(a)$, et ce pour tout $a \in I$.

2. *Adapter la démonstration précédente, en écrivant :* $uv(x) - uv(a) = u(x)v(x) - u(a)v(a) = u(x)v(x) - u(x)v(a) + u(x)v(a) - u(a)v(a)$*. On pourra utiliser que* u, v *sont continues en* a.

3. Commençons par montrer que $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$.
   Puisque $v(a) \neq 0$ et que v est continue en a, il existe un intervalle $J = [a-\alpha; a+\alpha]$ où v est non nulle et donc $\frac{1}{v}$ bien définie. Alors pour tout $x \in J$:
   $$\frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{v(a)}}{x-a} = \frac{v(a)-v(x)}{v(x)v(a)(x-a)}$$
   ....
   ....
   ....
   Écrivons maintenant : $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$. D'après l'item 2 et la propriété précédente :
   $\left(\frac{u}{v}\right)' =$ ....

Exemple. Cas particulier $u = 1$ dans la formule du quotient - utilisé dans la démonstration.

Exemple. Toute fonction polynômiale est dérivable en tout réel. La fonction inverse est dérivable en tout réel non nul.

Pourquoi ? En quoi est-ce un exemple des propriétés précédentes ? Quels autres exemples peut-on trouver à ce stade ?

♡ **Propriété 9** (Composition)**.** Soient I, J deux intervalles, avec $f : I \to J$ dérivable sur I et J dérivable sur J. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et
$$\forall a \in I, (g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$$

Démonstration. Soit $a \in I$. Posons $b = f(a)$ et $\phi : x \mapsto \begin{cases} g'(b) & \text{si } x = b \\ \frac{g(x)-g(b)}{x-b} & \text{sinon} \end{cases}$. ϕ ainsi définie est **continue en** b
Pourquoi ? ....
Par ailleurs, pour tout $y \in J$, $g(y) - g(b) = \phi(y)(y-b)$.
Pourquoi ?..
Alors, pour tout $h > 0$ (suffisamment petit pour que tout soit bien défini) :
$$\begin{aligned} \frac{(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a)}{h} &= \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} \\ &= \frac{g(f(a+h)) - g(b)}{h} \\ &= \phi(f(a+h)) \times \frac{(f(a+h) - b)}{h} \end{aligned}$$

car $f(x+h) \in J$ et $f(a) = b$.
On peut alors faire tendre h vers 0 : $\phi(f(a+h)) \xrightarrow[h\to 0]{} \phi(b) = g'(b)$ par continuité de ϕ, et $\frac{f(a+h)-b}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(a)$ par dérivabilité de f.
On déduit : $g \circ f$ dérivable en a et :
$$(g\circ f)'(a) = f'(a) \times g'(b) = f'(a) \times g'(f(a))$$

Exercice. Déterminer le nombre dérivé de $x \mapsto \sin(\sqrt{x})$ en 1

♡ **Exemples.** Exprimer pour u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ la dérivée de :
- $\sin u$
- $\cos u$
- $\tan u$, si $\tan \circ u$ est bien définie
- $\ln|u|$, où u ne s'annule pas

Propriété 10 (Bijection réciproque)**.** Soit f une fonction bijective de I dans J, dérivable sur I et $b \in J$ tel que f' ne s'annule pas en $f^{-1}(b)$. Alors f^{-1} est dérivable en b et
$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}}$$

♣ *Démonstration.* Remarquons d'abord que f bijective dérivable est continue donc strictement monotone et qu'alors sa réciproque est continue sur J. *Détail technique laissé en exercice ici (admis en colle)*
Soit $a \in I$ et $b = f(a) \in J$ tel que $f'(a) \neq 0$. Pour $y \in J$,
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}$$

Alors, par continuité de f^{-1} en b, $f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to b]{} a$. Ainsi, par composition de limites, puisque $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)$,

$$\frac{f^{-1}(y)-a}{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(b))} \xrightarrow[y\to b]{} \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Et si $f'(a)=0$? ....

Remarque. On **retrouve** rapidement la formule en dérivant l'égalité $(f\circ f^{-1})(x)=x$ (pas une démonstration!).

Exemple. La fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée ....
Tracer l'allure (avec la tangente en 0)

♡ *Exercice* (Fonctions exponentielle, logarithme, puissances (Rappels et compléments)). On définit la fonction exponentielle comme étant la seule fonction f vérifiant $f'=f$ et $f(0)=1$. On la note exp.

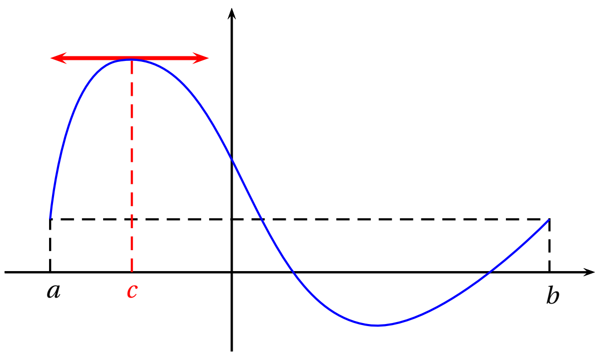
1. Montrer qu'une telle fonction est strictement positive (et ne s'annule pas) en montrant : $\forall x\in\mathbb{R}, \exp(x)\exp(-x)=1$
2. Montrer qu'une telle fonction est effectivement unique.
   Indication : on posera $h : x\mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ avec f, g deux telles fonctions.
3. Montrer que la fonction exponentielle est strictement croissante. En déduire qu'elle admet des limites en $\pm\infty$.
4. Montrer : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}, \exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$ et : $\forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, \exp(nx)=\exp(x)^n$. En déduire les limites de exp en $\pm\infty$.
5. Montrer que $\exp : \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ est bijective, de réciproque strictement croissante.
   On appelle logarithme népérien cette réciproque.
6. Déterminer la dérivée de la fonction ln
7. Pour tout $a>0$, on définit la fonction **puissance de base** a par : $\forall x\in\mathbb{R}, a^x=\exp(x\ln(a))$. Montrer que ces fonctions sont toutes dérivables, et déterminer leur dérivée.

3. Le théorème de Rolle

Théorème 11. Soient $a, b\in\mathbb{R}, a<b$ et f une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ vérifiant $f(a)=f(b)$. Alors

$$\exists c\in]a;b[, f'(c)=0$$

Remarque. c n'est pas unique (illustration!).



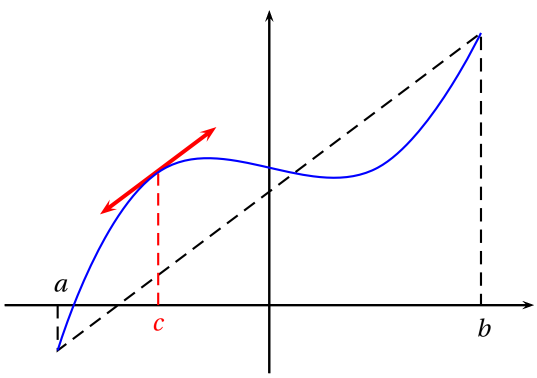
♡ *Démonstration.* Remarquons d'abord que si f est constante, le résultat est évident car ....
Supposons donc f non constante. f étant continue sur le segment $[a;b]$, par théorème des bornes, f admet un maximum M et un minimum m. Puisque f n'est pas constante, au moins m ou M n'est pas égal à $f(a)$ car $f(a)=f(b)$.
Expliquer cet argument. ....
Supposons par exemple que le maximum M est atteint en un point $c\in]a;b[$. Puisque $f(c)$ est le maximum de c alors pour tout $x\in]a;b[$, ...
On en déduit que pour $x>c$, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ est de signe .... et que pour $x<c$, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ est de signe .... En passant à la limite : $\boxed{f'(c)=0}$

Théorème 12 (Égalité des accroissements finis)**.** Soient $a, b\in\mathbb{R}, a<b$ et f une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$. Alors

$$\exists c\in]a;b[, f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Démonstration. Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g : x\mapsto f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

Remarque. Très utile pour déduire des propriétés sur f à partir de propriétés sur f'



Propriété 13 (Corollaire : inégalité des accroissements finis)**.**

- Si m, M sont des réels vérifiant pour tout $x \in]a; b[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

- Si $M > 0$ et que f est dérivable sur un intervalle I, avec $|f'| \leqslant M$ sur I, alors

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$$

Démonstration.

Remarque. Pour trouver des bornes m et M intelligentes, on réfléchira bien à l'intervalle sur lequel on applique le théorème. Les bornes m, M peuvent dépendre de a et b

Exemples. Montrer que

- pour tous réels x, y, $|\sin(x) - \sin(y)| \leqslant |x-y|$
- pour tout réel x, $|\sin(x)| \leqslant |x|$

Exercice (EML 96). Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. (a) Démontrer que f est paire sur $\mathbb{R}$
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$.
   Dresser son tableau de variations
   (c) Montrer que f admet un unique point fixe ℓ sur $\mathbb{R}_+$.
   On admet : $\ell \in [0; \frac{1}{2}]$.
   (d) Montrer : $\forall x \geqslant 0, |f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$
   (e) Montrer : $f\left(\left[0; \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0; \frac{1}{2}\right]$
2. Soit (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; \frac{1}{2}]$
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$.
   En déduire :: $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$
   (c) Montrer finalement que la suite (u_n) converge vers ℓ

♠ *Remarque.* Dans l'exercice précédent, ce qui fait fonctionner la preuve est le fait que f' soit petite en valeur absolue, en particulier au voisinage de ℓ. On dit que ℓ est un point fixe **attractif** de f quand $|f'(\ell)| < 1$ et répulsif si $|f'(\ell)| > 1$. Les points fixes attractifs *attirent*, c'est-à-dire que les suites récurrentes qui commencent suffisamment proche convergent vers le point fixe.

4. Conséquences : prolongement, variations d'une fonction dérivable

Propriété 14 (Prolongement $\mathscr{C}^1$)**.** Si $x_0 \in I$ et que f est continue sur I, dérivable sur $I \backslash \{x_0\}$ et que $f' \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$
En particulier, si $\ell \in \mathbb{R}$, f est dérivable sur I et f' est continue en x_0

Propriété 15 (Dérivée nulle)**.** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I vérifiant $f' = 0$. Alors f est constante sur I

Démonstration. Soient $x, y \in I$.
Appliquer le théorème des accroissements finis et montrer que $f(x) = f(y)$

Exemple. Contre-exemple si I n'est pas un intervalle : $\lfloor . \rfloor$ sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$

♣ **Exemple.** Deux fonctions f, g dérivables sur un intervalle I et vérifiant $f' = g'$ sont égales à une constante près :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = g(x) + c$$

On montre enfin le résultat bien connu sur les dérivées :

Propriété 16 (Dérivée de signe constant)**.** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors,

- Si $f' \geqslant 0$, f est croissante. Si $f' > 0$, f est strictement croissante.
- Si $f' \leqslant 0$, f est décroissante. Si $f' < 0$, f est strictement décroissante.

Démonstration. On démontre un des cas avec le théorème des accroissements finis.
♣ Adapter aux trois autres cas.

Exercice. Dresser le tableau de variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

Remarque. La réciproque n'est pas vraie pour la **stricte** monotonie (Conservation des inégalités LARGES à la limite) : contre-exemple de $x \mapsto x^3$

♣ **Propriété 17** (Affaiblissement des hypothèses)**.** Si f' est positive (au sens large) et s'annule en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.

Exercice. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x)$ est strictement croissante sur $[-5;5]$

Formulaire

Dérivées usuelles

Expression	Domaine	Dérivée
x^n, $n \in \mathbb{N}$ **Exemples :** constantes, affines, carré	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
x^n, $n \in \mathbb{Z}$ **Exemples :** fonction inverse	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$ **Exemples :** racines carrée, cubique	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
α^x, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\ln(\alpha)\alpha^x$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x), \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x), -\sin(x)$
$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Formules de dérivation Savoir appliquer la composition à toutes les fonctions usuelles.

- $(\lambda u)' = \lambda u'$
- $(u+v)' = u'+v'$
- $(\sum_{k=1}^{n} u_k)' = \sum_{k=1}^{n} u_k'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $(\frac{1}{v})' = \frac{-v'}{v^2}$
- $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
- $(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$
- $(u^{-1})' = \frac{1}{u' \circ u^{-1}}$