Feuille d'exercices n°10

Exercice 2. En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x+2}-e^2}{x^2}$
   On regarde la fonction $f : x \mapsto \exp(3x+2)$. Le taux d'accroissement de f entre x et 0 est : $\frac{e^{3x+2}-e^2}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0)$
   Or, $f'(x) = 3\exp(3x+2)$ donc $f'(0) = 3e^2 > 0$. Ainsi, par quotient, $\frac{e^{3x+2}-e^2}{x^2} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, $\frac{e^{3x+2}-e^2}{x^2} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$
   Idem avec $f(x) = \cos(x)$, on trouve 0
3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$
   Idem avec $f(x) = \ln(2-x)$ avec $x \to 1$ et $f'(1) = -\frac{1}{2-1} = -1$
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\exp(\cos(x))-1}{x-\frac{\pi}{2}}$
   Idem avec $f(x) = \exp(\cos(x))$ avec $x \to \frac{\pi}{2}$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \exp\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -1$

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $I = [\frac{\pi}{2}, \pi[$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
   f est dérivable (donc continue) sur I. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)} > 0$ (car sur I, cos est négatif). Ainsi, **f est strictement croissante sur I**. Par ailleurs, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $f(x) \xrightarrow[x\to\pi]{} +\infty$.
   Par théorème de la bijection, f est bijective de I vers $[1; +\infty[$.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et calculer sa dérivée.
   D'après la question précédente, on sait que f' ne s'annule jamais. Ainsi, f^{-1} est dérivable sur J entier (d'après le cours) et :
   $$\forall y \in J, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{\sin^2(f^{-1}(y))}{-\cos(f^{-1}(y))}$$
   À ce stade, on a déterminé la dérivée de f^{-1}, mais c'est assez peu satisfaisant puisqu'on n'a aucun moyen de calcul de $f^{-1}(y)$. Cependant, on sait que pour tout $y \in J$, $f(f^{-1}(y)) = y$, i.e. $\frac{1}{\sin(f^{-1}(y))} = y$ i.e. $\sin(f^{-1}(y)) = \frac{1}{y}$.
   On peut simplifier un peu :
   $$(f^{-1})'(y) = -\frac{1}{y\cos(f^{-1}(y))}$$
   Par ailleurs, $\cos(f^{-1}(y))^2 + \sin(f^{-1}(y))^2 = 1$, donc $\cos^2(f^{-1}(y)) = 1 - \frac{1}{y^2}$. Puisque $f^{-1}(y) \in I$, $\cos(f^{-1}(y)) \leq 0$ et donc $\cos(f^{-1}(y)) = -\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}$.
   Finalement :
   $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 1 < x. \end{cases}$

1. Montrer que la dérivée de f admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$.
   La question est un peu mal posée, la fonction étant définie sur $\mathbb{R}$, il faudrait plutôt dire «montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$».
   Or, on peut déjà voir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Par ailleurs, $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{3-1}{2} = 1$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} \frac{1}{1} = 1$. Ainsi, f est continue en 1.
   Par ailleurs, pour $x < 1$, $f'(x) = \frac{-2x}{2} = -x$ et pour $x > 1, f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Ainsi, pour $x \to 1$, $f'(x) \to -1$.
   D'après le théorème de prolongement de la dérivée, f est dérivable en 1 avec $f'(1) = -1$, et f' est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer qu'il existe $c \in]0,2[$ tel que $f(2) - f(0) = (2-0)f'(c)$.
   Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, cette question est une simple application du théorème des accroissements finis.
3. Déterminer les valeurs possibles pour c.
   Remarque : ici on va chercher à résoudre l'équation $f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0}$. Si on trouve des solutions, alors la question précédente n'a pas vraiment d'intérêt : pas besoin d'un résultat abstrait d'existence si on peut résoudre l'équation !
   Commençons par calculer $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$.
   Pour $c > 1$, $f'(c) = -\frac{1}{c^2}$. Ainsi, $f'(c) = -\frac{1}{2} \iff -\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{2} \iff c^2 = 2 \iff c \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$. Puisque $-\sqrt{2} < 1$ et $\sqrt{2} > 1$, il y a une solution : $c = \sqrt{2}$.
   Pour $c < 1$, $f'(c) = -c$ donc $f'(c) = -\frac{1}{2} \iff -c = -\frac{1}{2} \iff c = \frac{1}{2}$ qui est bien strictement inférieur à 1.
   $f'(1) \neq -\frac{1}{2}$ donc il reste deux solutions : $\boxed{c \in \{\frac{1}{2}; \sqrt{2}\}}$

Exercice 9. Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = \frac{1}{x}$ admettent une unique tangente commune.
Commencer par tracer les deux courbes sur une calculatrice ou un ordinateur ou encore mieux : à la main, et essayer de «repérer» une tangente commune. À la fin du calcul, on peut la tracer aussi et vérifier que «ça marche». Le changement de registre entre la résolution «calcul» et le sens graphique est super important !
On cherche une droite T d'équation $y = mx + p$ qui soit tangente aux deux courbes. Appelons a le point auquel T est tangente à la courbe de la fonction carré, et b le point auquel T est tangente à la courbe de la fonction inverse.
Les équations de tangente donnnent :

$$y = 2a(x-a) + a^2 = -\frac{1}{b^2}(x-b) + \frac{1}{b}$$

On en déduit les deux équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a & = & -\frac{1}{b^2} \\ -a^2 & = & \frac{2}{b} \end{array}\right.$$

En raisonnant par substitution (le système n'est pas linéaire !) on obtient : $8b^3 = -1$, i.e. $b = -\frac{1}{2}$ et donc $a = -2$.
Tracer donc la tangente à la courbe de la fonction carré au point $(-2, 4)$ et vérifier qu'elle est tangente à la fonction inverse au point $(-\frac{1}{2}, -2)$

Exercice 10. On étudie la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+x}{3x+1}$

1. Déterminer le domaine de dérivabilité de f
   Puisque $x \mapsto x^2 + x$ et $x \mapsto 3x + 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable en tout point tel que $3x + 1 \neq 0$, i.e. $x \neq -\frac{1}{3}$.
   Le domaine de dérivabilité (et de définition) de f est $\mathbb{R} \backslash \{-\frac{1}{3}\}$.
2. Déterminer le tableau de variation de f.
   $\forall x \neq -\frac{1}{3}$,
   $$f'(x) = \frac{(2x+1)(3x+1) - 3(x^2+x)}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2+2x+1}{(3x+1)^2}$$
   $f'(x)$ est donc du signe de $3x^2 + 2x + 1$. C'est un polynôme du second degré, de discriminant $\Delta = 4 - 12 < 0$. On on déduit que f' est de signe constant positif et donc que f est croissante sur chacun des deux intervalles de son ensemble de définition.
3. Tracer les tangentes en $-1, 0, 1$
   $f'(-1) = \frac{1}{2} \quad ; \quad f'(0) = 1 \quad ; \quad f'(1) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$
4. Déterminer les asymptotes éventuelles de f puis tracer l'allure de sa courbe
   f admet une asymptote verticale $x = -\frac{1}{3}$ (puisque $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \neq 0$ et $3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$
   Cherchons maintenant des asymptotes obliques en $\pm\infty$.
   $\forall x \notin \{0; -\frac{1}{3}\}$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2+x}{3x^2+x} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \frac{1}{3}$. Par ailleurs,
   $$f(x) - \frac{1}{3}x = \frac{x^2 + x - \frac{1}{3}x(3x+1)}{3x+1} = \frac{2}{3}\frac{x}{3x+1} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \frac{2}{9}$$

Ainsi, en $+\infty$ et en $-\infty$, la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$

Exercice 12. Soit $n \geq 2$ un entier et $p, q \in \mathbb{R}$. On note $P(x) = x^n + px + q$

1. Démontrer par l'absurde que P admet au plus 3 racines réelles.
   Supposons par l'absurde que P admet 4 racines distinctes a, b, c, d. Alors, $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 0$ et P est dérivable (car c'est un polynôme) donc d'après le théorème de Rolle, P' admet une racine sur $]a; b[$, une racine sur $]b; c[$ et une racine sur $]c; d[$.
   Or, $P'(x) = nx^{n-1} + p$. Or l'équation $x^{n-1} = -\frac{p}{n}$ a au plus deux solutions (opposées si $n-1$ est pair, une seule si $n-1$ est impair par stricte croissance de $x \mapsto x^{n-1}$.
   C'est donc en contradiction avec le fait que P' ait 3 racines distinctes. Ainsi, P admet au plus 3 racines réelles.
2. On suppose que n est pair. Démontrer que P admet au plus deux racines réelles.
   Voir question précédente sur la parité.

Exercice 13. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0, +\infty[$ et telle que $f(0) = \lim\limits_{+\infty} f = 0$. On souhaite démontrer qu'il existe $d \in]0, +\infty[$ tel que $f'(d) = 0$. Le résultat étant trivial si $f = 0$, on suppose que ce n'est pas le cas

1. Écrire la négation de «f est la fonction nulle»
   $\exists x \in \mathbb{R}_+, f(x) \neq 0$
2. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(c) > 0$. Démontrer qu'il existe $a \in]0; c[$ et $b \in]c; +\infty[$ tels que $f(a) = f(b)$
   Par continuité de f, il existe un $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [c-\alpha; c]$, $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$. Prenons $a = c - \alpha$.
   Par TVI, puisque $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 < \frac{f(c)}{2}$, il existe $b \in]c; +\infty[$ tel que $f(b) = \frac{f(c)}{2} = f(a)$.
3. Conclure
   Dans ce premier cas, en appliquant le théorème de Rolle sur le segment $[a; b]$, on trouve un $d \in]a; b[\subset \mathbb{R}_+^*$ tel que $f'(d) = 0$.
   Si il n'existe pas de $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(c) > 0$, il existe un $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(c) < 0$. Alors, $-f(c) > 0$ et en appliquant le résultat précédent à $-f$, on trouve un d tel que $-f'(d) = 0$, i.e. $f'(d) = 0$.

♠ **Exercice 16** (Règle de l'Hospital)**.** Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables et à dérivée continue avec : $\forall x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$.
Remarque : la dérivée continue permet de dire que g' est de signe constant, donc que $g(b) \neq g(a)$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
   (Appliquer le théorème de Rolle à $f - \lambda g$ où λ est un réel bien choisi)
   Posons $h : x \mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$. Cette fonction est bien définie car $g(b) - g(a) \neq 0$ (sinon par théorème de Rolle, il y aurait un point où g' s'annule).
   h est de classe $\mathcal{C}^1$ car f et g le sont et :
   $$h(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(a) = \frac{f(a)(g(b)-g(a)) - g(a)(f(b)-f(a))}{g(b)-g(a)} = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$
   $$h(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(b) = \frac{f(b)(g(b)-g(a)) - g(b)(f(b)-f(a))}{g(b)-g(a)} = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b)-g(a)} = h(a)$$
   Ainsi, $h(a) = h(b)$ et donc par théorème de Rolle, il existe un réel c tel que $h'(c) = 0$,i.e. $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$ i.e. $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ puisque $g'(c) \neq 0$.
2. En déduire que si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \longrightarrow \ell$ lorsque $x \longrightarrow a^+$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \longrightarrow \ell$ lorsque $x \longrightarrow a^+$ (règle de l'Hospital).
   Appliquons le résultat précédent à $[a; x]$ avec $c_x \in [a; x]$. Par théorème des gendarmes, $c_x \xrightarrow[x \to a]{} a$.
   Ainsi,
   $$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

3. Déterminer la limite en 0^+ de $\frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.
On applique le résultat précédent à $a = 0$, $f : x \mapsto \cos(x) - e^x$ et $g : x \mapsto (x+1)e^x - 1$. Or, $f'(x) = -\sin(x) - e^x$, $g'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$. Ainsi,
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\sin(x) - e^x}{(x+2)e^x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\frac{1}{2}$$
D'après la règle de l'Hospital de la question précédente, on en déduit que $\frac{\cos(x)-e^x}{(x+1)e^x-1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\frac{1}{2}$

Exercice 18. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n)$

1. Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution dans $[0, 1]$, notée α.
Par théorème des valeurs intermédiaires sur la fonction $x \mapsto \cos(x) - x$ strictement décroissante
2. Justifier que :
$$\forall x \in [-1, 1], |\cos'(x)| \leq \sin(1)$$
Pour tout $x \in [-1; 1]$, $|\cos'(x)| = |-\sin(x)| = |\sin(x)|$. Puisque sin est impaire, le maximum de $|\sin|$ sur $[-1; 1]$ est le même que sur $[0; 1]$ et par croissance de sin sur $[0; 1]$, on peut écrire :
$$\forall x \in [-1; 1], |\cos'(x)| = |\sin(x)| \leq \sin(1)$$
3. Montrer alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \sin(1) \times |u_n - \alpha|.$$
Puisque $\cos(\alpha) = \alpha$ et $\cos(u_n) = u_{n+1}$, d'après la question précédente et l'inégalité des accroissements finis on peut écrire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \sin(1)|u_n - \alpha|$$
4. En déduire que (u_n) converge vers α
Récurrence pour montrer $|u_n - \alpha| \leq \sin(1)^n |u_0 - \alpha|$ puis théorème des gendarmes.