Feuille d'exercices n°10

Calcul, variations

Exercice 1. Dériver les expressions suivantes en précisant l'ensemble de dérivabilité :

1. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$
2. $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$
3. $f(x) = \frac{e^x}{x^2-3x+5}$
4. $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x^2}$
5. $f(x) = \arctan(\ln(1+x^2))$
6. $f(x) = (\frac{3x}{x+4})^2$

On trouve beaucoup d'exercices de calcul de dérivées dans les livres Dunod et sur Bibmath : ne pas hésiter à pratiquer régulièrement !

Exercice 2. En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x+2}-e^2}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\exp(\cos(x))-1}{x-\frac{\pi}{2}}$

♢ **Exercice 3** (Une formule de trigonométrie)**.** Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $I = [\frac{\pi}{2}, \pi[$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et calculer sa dérivée.
   On pourra utiliser la formule du cours $\cos^2 + \sin^2 = 1$

Dérivabilité, prolongement

Exercice 5. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables aux points précisés ? (Si oui, préciser le nombre dérivé)

1. $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ en 0
2. $g(x) = \begin{cases} (x-1) & \text{si } x \leqslant 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en 1
3. $h(x) = |x|\sin(x)$ en 0.

♢ **Exercice 6.** Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f : \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{0,1\} \\ x + \frac{x\ln x}{1-x} & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $[0,1]$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 1 < x. \end{cases}$

1. Montrer que la dérivée de f admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]0,2[$ tel que $f(2) - f(0) = (2-0)f'(c)$.
3. Déterminer les valeurs possibles pour c.

Exercice 8 (Fonction dérivable pas $\mathcal{C}^1$)**.** Soit f définie par $f(x) = x^2\sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f' n'est pas continue en 0.

Tracés de courbes, tangentes

Exercice 9. Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = \frac{1}{x}$ admettent une unique tangente commune.

Exercice 10. On étudie la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+x}{3x+1}$

1. Déterminer le domaine de dérivabilité de f
2. Déterminer le tableau de variation de f.
3. Tracer les tangentes en $-1, 0, 1$
4. Déterminer les asymptotes éventuelles de f puis tracer l'allure de sa courbe

Exercice 11. En distinguant selon la valeur de α, tracer l'allure de la courbe de la fonction définie sur $]0;1[$ par $f(x) = (-\ln(x))^\alpha$

Théorème de Rolle, (in)égalité des accroissements finis

Exercice 12. Soit $n \geqslant 2$ un entier et $p, q \in \mathbb{R}$. On note $P(x) = x^n + px + q$

1. Démontrer par l'absurde que P admet au plus 3 racines réelles.
2. On suppose que n est pair. Démontrer que P admet au plus deux racines réelles.

Exercice 13. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0, +\infty[$ et telle que $f(0) = \lim\limits_{+\infty} f = 0$. On souhaite démontrer qu'il existe $d \in]0, +\infty[$ tel que $f'(d) = 0$. Le résultat étant trivial si $f = 0$, on suppose que ce n'est pas le cas

1. Écrire la négation de «f est la fonction nulle»
2. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(c) > 0$. Démontrer qu'il existe $a \in]0; c[$ et $b \in]c; +\infty[$ tels que $f(a) = f(b)$
3. Conclure

♢ **Exercice 14.** Démontrer les inégalités suivantes :

1. $$\forall x, y \in \mathbb{R}, |\arctan(x) - \arctan(y)| \leqslant |x - y|$$
2. $$\forall x \geqslant 0, x \leqslant e^x - 1 \leqslant xe^x$$

♢ **Exercice 15.** Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

♠ **Exercice 16** (Règle de l'Hospital)**.** Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables et à dérivée continue avec : $\forall x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$.
Remarque : la dérivée continue permet de dire que g' est de signe constant, donc que $g(b) \neq g(a)$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
   (Appliquer le théorème de Rolle à $f - \lambda g$ où λ est un réel bien choisi)
2. En déduire que si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \longrightarrow \ell$ lorsque $x \longrightarrow a^+$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \longrightarrow \ell$ lorsque $x \longrightarrow a^+$ (règle de l'Hospital).
3. Déterminer la limite en 0^+ de $\frac{\cos x - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

Suites récurrentes, dérivée au point fixe

♢ **Exercice 17.** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - 2|$.
2. Déterminer la convergence de la suite (u_n).

Exercice 18. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n)$

1. Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution dans $[0, 1]$, notée α.
2. Justifier que :
$$\forall x \in [-1, 1], |\cos'(x)| \leqslant \sin(1)$$
.
3. Montrer alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \sin(1) \times |u_n - \alpha|.$$
4. En déduire que (u_n) converge vers α

Un exercice sur les fonctions puissances (les nouvelles)

Exercice 19. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de : $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$