Devoir Maison n°7 - Diagonalisation d'une matrice : étude de suites et équations différentielles

Trois suites

Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que P est inversible et donner P^{-1}

   En utilisant l'algorithme du Pivot de Gauss, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Penser à vérifier en calculant PP^{-1} !

   (b) Calculer $D = PAP^{-1}$

   On trouve $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   D est une matrice diagonale.

   (c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une expression de A^n.

   Puisque D est diagonale, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Par ailleurs, montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = P^{-1}D^nP$

   <u>Initialisation :</u> pour $n = 1$, on sait que $D = PAP^{-1}$. Alors $P^{-1}DP = P^{-1}PAP^{-1}P = I_3AI_3 = A$. La propriété est initialisée.

   <u>Hérédité :</u> soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. Supposons $A^n = P^{-1}D^nP$. Alors,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= (P^{-1}DP)(P^{-1}D^nP) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= P^{-1}D(PP^{-1})D^nP \text{ par associativité} \\ &= P^{-1}DD^nP \\ &= P^{-1}D^{n+1}P \end{aligned}$$

   La récurrence est établie.

   <u>Conclusion :</u> pour tout $n \geq 1$, $A^n = P^{-1}D^nP$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 3^n & 0 \\ 0 & -3^n & 0 \\ -(-1)^n & -3^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n & (-1)^n - 3^n & 3^n \\ -3^n & 3^n & -3^n \\ -(-1)^n - 3^n & -(-1)^n + 3^n & -3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Dans cette question on étudie des suites réelles (x_n), (y_n) et (z_n) qui vérifient les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & 2x_n & - & 4y_n & + & 3z_n \\ y_{n+1} & = & -3x_n & + & 3y_n & - & 3z_n \\ z_{n+1} & = & -2x_n & + & 4y_n & - & 3z_n \end{array} \right.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$.

1. Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$
   Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} AX_n &= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_n - 4y_n + 3z_n \\ -3x_n + 3y_n - 3z_n \\ -2x_n + 4y_n - 3z_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= X_{n+1} \end{aligned}$$

2. En déduire une relation entre X_n, A et X_0.
   On montre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$
3. Exprimer x_n, y_n, z_n en fonction des réels x_0, y_0, z_0
   On a trouvé à la question précédente une expression de A^n. On trouve donc :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n & (-1)^n - 3^n & 3^n \\ -3^n & 3^n & -3^n \\ -(-1)^n - 3^n & -(-1)^n + 3^n & -3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

   On en déduit que pour tout entier n :
   - $x_n = (-1)^n(x_0 + y_0) + 3^n(x_0 - y_0 + z_0)$
   - $y_n = 3^n(-x_0 + y_0 - z_0)$
   - $z_n = (-1)^n(-x_0 - y_0) + 3^n(-x_0 + y_0 - z_0)$
4. À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur les réels x_0, y_0, z_0 la suite (x_n) converge-t-elle ?
   Si $x_0 - y_0 + z_0 \neq 0$, alors $x_n \to +\infty$ (puisque l'autre morceau est borné). Une première condition nécessaire est donc $x_0 - y_0 + z_0 = 0$. Ce n'est pas une condition suffisante : on a alors $x_n = (-1)^n(x_0 + y_0)$. Cette suite diverge si $x_0 + y_0 \neq 0$.
   On en déduit une condition nécessaire et suffisante :

$$\boxed{x_0 - y_0 + z_0 = 0 \text{ et } x_0 + y_0 = 0}$$

Équations différentielles

1. On rappelle que pour $a \in \mathbb{R}$, l'équation $y' = ay$, d'inconnue y dérivable sur $\mathbb{R}$, admet pour solutions toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto \lambda \times e^{ax}$, avec λ un réel.
   Dans cette question, on cherche les fonctions x, y, z dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & - & 4y(t) & + & 3z(t) \\ y'(t) & = & -3x(t) & + & 3y(t) & - & 3z(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) & + & 4y(t) & - & 3z(t) \end{array} \right.$$

   Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$ et $Y(t) = PX(t)$
   (a) Vérifier : $\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = PX'(t)$
   Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) + y(t) \\ x(t) - y(t) + z(t) \\ x(t) + z(t) \end{pmatrix}$$

   Puisque x, y, z sont des fonctions dérivables, Y aussi (à valeurs dans $\mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$, ce qui n'est pas tout à fait défini dans le cadre de notre cours) et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) + y'(t) \\ x'(t) - y'(t) + z'(t) \\ x'(t) + z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = PX'(t)$$

(b) En déduire : $(\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)) \iff (\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = DY(t))$
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) &\iff X'(t) = P{-}1DPX(t) \\ &\iff PX'(t) = PP^{-1}DPX(t) \text{ car } P \text{ est inversible (nécessaire pour l'équivalence !)} \\ &\iff Y'(t) = DY(t) \text{ par définition de } Y \text{ et d'après la question précédente} \end{aligned}$$

L'équivalence est vérifiée.

(c) On note $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$. En supposant $Y'(t) = DY(t)$, donner une expression de $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$

$$\begin{aligned} Y'(t) = DY(t) &\iff \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \\ \gamma'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha'(t) & = & -\alpha(t) \\ \beta'(t) & = & 3\beta(t) \\ \gamma'(t) & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \exists(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha(t) & = & \lambda e^{-t} \\ \beta(t) & = & \mu e^{3t} \\ \gamma(t) & = & \nu \end{array} \right. \end{aligned}$$

(d) Justifier que $X(t) = P^{-1}Y(t)$ est une solution du système différentiel et initial et donner une expression de $x(t), y(t), z(t)$
D'après les questions précédentes, si $Y(t) = PX(t)$ (i.e. $X(t) = P^{-1}Y(t)$) est une solution du problème $Y'(t) = DY(t)$ alors $X'(t) = AX(t)$ pour tout réel t. Ainsi, $P^{-1}Y(t)$ est une solution de notre système initial et on a :

$$\begin{aligned} X(t) &= P^{-1}Y(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda e^{-t} \\ \mu e^{3t} \\ \nu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda e^{-t} + \mu e^{3t} - \nu \\ -\mu e^{3t} + \nu \\ -\lambda e^{-t} - \mu e^{3t} + 2\nu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

λ, μ, ν telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \lambda e^{-t} + \mu e^{3t} - \nu \\ y(t) & = & -\mu e^{3t} + \nu \\ z(t) & = & -\lambda e^{-t} - \mu e^{3t} + 2\nu \end{array} \right.$$