Proba 1

Chapitre 12 : Espaces probabilisés (finis)

I. Événements

1. Expérience aléatoire

On s'intéresse dans ce chapitre à des expériences renouvelables (en théorie) dont l'issue peut changer à chaque renouvellement de l'expérience, et dont on ne peut pas toujours prévoir le résultat. On appelle ces expériences des expériences **aléatoires** et on s'intéresse ici à leur modélisation.

Remarque. En fait, une expérience dont on peut prévoir le résultat pourra aussi être vue comme un cas particulier des expériences aléatoires, ce qui rend cette « définition » un peu trop vague.

Exemples. Un lancer de dés, une carte prise au hasard dans un paquet, un « pile ou face », une boule tirée dans une urne (type Loto).
En pratique, n'importe quelle grandeur inconnue peut être modélisée par une expérience aléatoire (prix d'un objet à un instant t en finance, résultat d'un match de foot pour les paris sportifs, vitesse ponctuelle d'une particule en physique statistique, note au concours...)

Remarque. Dans toute la suite, on s'intéressera à des expériences pouvant donner un **nombre fini de résultats** : une carte parmi 52 par exemple, mais pas n'importe quel «vecteur vitesse» de $\mathbb{R}^2$

Définition 1 (Issues, univers)**.** On munira la description d'une expérience aléatoire d'un ensemble Ω fini.
- On appelle Ω **univers** ou **ensemble des issues**
- Un élément $\omega \in \Omega$ est appelé une **issue** de l'expérience aléatoire.
- On appelle $\mathscr{P}(\Omega)$ ensemble des **événements** et tout élément $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un événement.

Exemples. Pour un lancer de deux pièces à « pile ou face » on prendra
- $\Omega = \{P,F\}^2 =$ ....
- $$\begin{aligned}\mathscr{P}(\Omega) = \{&\emptyset;\Omega;\\ &\{(P,P)\};\{(P,F)\};\{(F,P)\};\{(F,F)\};\\ &\{(P,P);(P,F)\};\{(P,P);(F,P)\};\{(P,P);(F,F)\};\{(P,F);(F;P)\};\{(P,F);(F,F)\};\{(F,P);(F,F)\};\\ &\{(P,P);(P,F);(F,P)\};\{(P,P);(P,F);(F,F)\};\{(P,P);(F,P);(F,F)\};\{(P,F);(F,P);(F,F)\}\}\end{aligned}$$
- Un événement est un élément de $\mathscr{P}(\Omega)$: par exemple $A = \{(P,P);(F,F)\}$ ou $B = \{(P,F);(F,P);(F,F)\}$
- On décrira parfois (souvent) un événement par une phrase, par exemple A : « les deux pièces ont la même face visible », ou B : « au moins une pièce tombe sur Face »

Définition 2. L'événement $\emptyset$ est appelé **événement impossible**, l'événement Ω est appelé **événement certain**. Tout singleton est appelé **événement élémentaire** : il est composé d'une seule issue.

Exercice. Déterminer une modélisation du lancer d'un dé (classique à 6 faces), en explicitant Ω. Combien y a-t-il d'événements différents? Donner un exemple d'événement élémentaire.

2. Opérations

Les événements étant des ensembles, on peut leur appliquer les différentes opérations ensemblistes. Soient A, B des événements. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A, $A \cup B$ l'union des événements A et B, et $A \cap B$ leur intersection.

Exemples. On tire au hasard une carte dans un paquet de 52 cartes. On note A :« la carte tirée est un carreau » et B : « la carte tirée est une figure »
- Combien y a-t-il d'issues dans chacun des événements A et B?
- Expliciter $\overline{A}, \overline{B}, A \cap B, A \cup B, \overline{A \cap B}, \overline{A \cup B}$

Propriété 3 (Rappels)**.** Soient A, B, C des événements.
1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (distributivité)
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (distributivité)
3. Règles de de Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

3. Système complet d'événements

Définition 4 (Événements incompatibles)**.** Deux événements $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$ (c'est-à-dire $A \subset \overline{B}$ càd $B \subset \overline{A}$)

Exemple. Tirage de deux pièces à pile ou face. On peut séparer l'ensemble des possibilités selon le résultat de la première pièce. On note $A = \{(P, F); (P, P)\}$ et $B = \overline{A} = \{(F, F); (F, P)\}$

Définition 5. On appelle **système complet d'événements** une famille $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ d'événements vérifiant :

- $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$
- $\forall (i, j) \in [|1; n|], i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

C'est-à-dire que chaque issue de Ω se trouve dans exactement **un** ensemble parmi $(A_1, \dots, A_n)$. Chaque réalisation de l'expérience aléatoire réalise exactement **un** événement du système.

Exemple. La famille $(\emptyset, \Omega)$ est un système complet d'événements. Pour tout ensemble A, la famille $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.

♣ *Exercice.* On considère le tirage d'un dé, avec $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Déterminer au moins un système complet de 3 événements. Combien de systèmes complets à 3 événements existent ? (pas si facile)

II. Probabilité

1. Définition

On se place dans toute la suite dans un univers Ω muni de l'ensemble de ses événements $\mathscr{P}(\Omega)$

Définition 6. On appelle probabilité toute fonction $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0; 1]$ vérifiant :
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\forall A, B \in \mathscr{P}(\Omega), A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Cette deuxième propriété s'appelle **additivité** de $\mathbb{P}$

Notation. Union disjointe : $\uplus$ ou $\amalg$

Exemples. On considère un lancer de dé à 6 faces.

- La **probabilité uniforme** est la fonction $\mathbb{P} : \mathscr{P}([|1; 6|]) \to [0; 1]$ qui à un événement $\mathscr{A}$ associe $\dfrac{|\mathscr{A}|}{6}$
- On peut modéliser un dé « truqué » qui tombe toujours sur 6 par :

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P} : & \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0; 1] \\ & A & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } 6 \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Définition 7 (Probabilité uniforme)**.** Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**. La probabilité associée est dite **uniforme** et est définie par

$$\forall \mathscr{A} \in \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}(\mathscr{A}) = \frac{|\mathscr{A}|}{|\Omega|}$$

Remarque. Ce cas particulier de probabilité uniforme crée un lien entre le monde des probabilités et le dénombrement.

Exemple. On tire simultanément trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes (4 couleurs, du 7 à l'as). Quelle est la probabilité :

1. de n'obtenir que des cœurs ?
2. de n'obtenir que des as ?
3. d'obtenir deux cœurs et un pique ?

On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

2. Propriétés

Propriété 8. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité. Alors

1. $\mathbb{P}(\emptyset)=0$
2. $\forall A\in\mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}(\overline{A})=1-\mathbb{P}(A)$
3. $\forall A,B\in\mathscr{P}(\Omega), A\subset B\Rightarrow \mathbb{P}(A)\leq\mathbb{P}(B)$
4. Pour tous $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ deux à deux disjoints,
$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)$$
5. Si $\{A_1,\dots,A_n\}$ est un système complet d'événements,
$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)=1$$
6. $\forall A\in\mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}(A)=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)$

♡ *Démonstration.* Propriété 3 : retenir la méthode pour se ramener à une union disjointe.

Exercice. Retour au dé : toute famille de réels positifs $(p_1,\dots,p_6)$ vérifiant $p_1+\dots+p_6=1$ définit une probabilité sur $[|1;6|]$, en posant : $\forall A\in\mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}(A)=\sum_{k=1}^{n}p_i\mathbb{1}_A(i)$ où $\mathbb{1}_A(i)=\begin{cases}1 & \text{si } i\in A\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Exemple :

ω	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(\{\omega\})$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?

3. Formule du crible

Propriété 9. Soient A,B,C trois événements.

- $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$
- $\mathbb{P}(A\cup B\cup C)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$

Démonstration.

♣ *Exercice.* Trouver (et démontrer) une formule analogue pour $\mathbb{P}(A\cup B\cup C\cup D)$

♡ **Propriété 10** (Corollaire)**.**
$$\forall A,B\in\mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}(A\cup B)\leq\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$$

Cette propriété se généralise à un nombre $n\in\mathbb{N}$ d'événements $A_1,\dots,A_n$ par récurrence : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)$

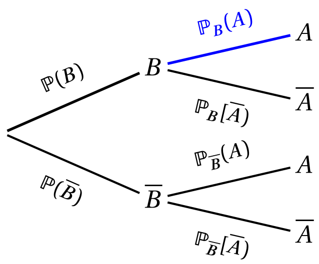
III. Probabilité conditionnelle

1. Définition

♡ **Définition 11.** Soient A,B deux événements tels que $\mathbb{P}(B)>0$. On appelle **probabilité sachant** B **de** A la quantité
$$\mathbb{P}_B(A)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Propriété 12. La probabilité conditionnelle $A\mapsto\mathbb{P}_B(A)$ est une probabilité sur Ω ! D'où la notation $\mathbb{P}_B$. Ainsi, $\mathbb{P}_B$ vérifie toutes les mêmes propriétés que $\mathbb{P}$ (cf prop. 7)

Les probabilités conditionnelles sont celles qui apparaissent au deuxième niveau d'un arbre de probabilité :



2. Les formules reines du chapitre

Exemple. Soit A et B deux événements. Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on a $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)$.

Propriété 13 (Formule des probabilités composées)**.** Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements tels que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$$

Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots\mathbb{P}_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Démonstration.

Illustration : Voir le lien avec les arbres de probabilité.
Pour calculer la probabilité d'une branche d'un arbre, on calcule le produit des probabilités apparaissant sur cette branche.

Exercice. On tire successivement et sans remise 3 boules dans une urne qui contient 3 boules blanches et 7 boules noires. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches ?

Propriété 14 (Formule des probabilités totales)**.** Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ un système complet d'événements. On a pour tout $B \in \mathbb{P}(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k)$$

Si de plus, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$, alors :

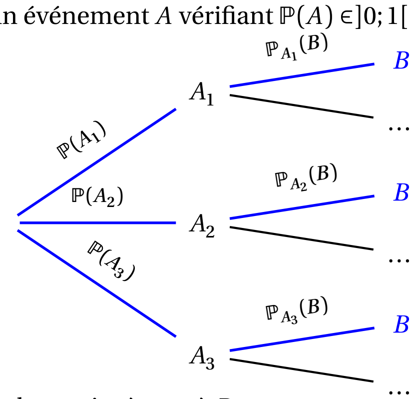
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)$$

Démonstration.

Exemple. Appliquer cette formule à un système $\{A, \overline{A}\}$ pour un événement A vérifiant $\mathbb{P}(A) \in]0;1[$

Ici :

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}(B) + \mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}_{A_3}(B)$



Pour trouver la probabilité de B, on additionne toutes les branches qui mènent à B.

♡ **Propriété 15** (Formule de Bayes)**.** Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, alors :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}_A(B)$$

Démonstration.

Exemple (Dépistage)**.** Un test est développé pour détecter une maladie présente chez 0.1% de la population. Le test est plutôt fiable : si une personne est malade, le test est positif dans 99% des cas ; si elle ne l'est pas, le test est négatif dans 99% des cas également.
Si vous faites un test positif, quelle est la probabilité que vous soyiez malade ?

Remarque. La formule de Bayes permet **d'inverser** un conditionnement.

3. Événements indépendants sous $\mathbb{P}$

♡ **Définition 16.** On dit que deux événements $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ sont **indépendants** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Propriété 17. Si B est de probabilité non nulle, A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$$

Remarque.

- L'indépendance de deux événements dépend du choix de $\mathbb{P}$ dans la modélisation, pas des événements en eux mêmes. L'indépendance ne se **vérifie jamais** en disant «ces deux choses n'ont aucun rapport entre elles».
- En revanche, l'indépendance est parfois admise, de façon plus ou moins explicite dans l'énoncé.
- Un événement certain ou impossible est indépendant de lui-même
- Cette reformulation s'interprète comme « Savoir que B est réalisé ne donne aucune information supplémentaire sur la vraisemblance de A »

Propriété 18. Si A, B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$; $\overline{A}$ et B ; $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration.

Exemple. On lance un dé. Les événements A =« obtenir 1 ou 2 » et B =« obtenir 2 ou 3 » sont-ils indépendants lorsque...

- le dé est équilibré ?
- le dé donne les faces avec les probabilités suivantes :

k	1	2	3	4	5	6
$P(\{k\})$	$1/6$	$1/6$	$1/3$	$1/9$	$1/9$	$1/9$

Définition 19. On dit que des événements $A_1, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** si

$$\forall I \subset [|1;n|], \mathbb{P}(\bigcap_{k\in I} A_k) = \prod_{k\in I} \mathbb{P}(A_k)$$

Propriété 20 (Admise)**.** Si $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors toute famille de la forme $B_1, \ldots, B_n$ où pour tout $i \in [|1;n|]$, $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Remarque. Si des événements sont mutuellement indépendants, en particulier en prenant un ensemble I à deux éléments, tous événements A_i et A_j sont indépendants. On dit alors que $\{A_1, \ldots, A_n\}$ sont **deux à deux indépendants**.

♡ *Exercice.* On lance deux fois un dé équilibré, et on regarde les événements :

- A_1 : « le premier chiffre est pair »
- A_2 : « le deuxième chiffre est pair »
- A_3 : « la somme des deux dés est paire »

Montrer que A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.