Feuille d'exercices n°11

Dans ce TD, le symbole **!** *représente des exercices corrigés à la fin du document.*

Degré, coefficients

Exercice 1. Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

1. $P(x) = 3x^3 + x^2 - 5x + 1$
2. $Q(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
3. $R(x) = \sum_{k=0}^{3} (-k)x^k$
4. PQ
5. $P + Q$
6. $P + R$
7. $S(x) = \prod_{k=1}^{n} (\frac{x}{2} + k)^k$

♢ **Exercice 2** (Conditions sur le degré pour résoudre une équation)**.**

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant :
   (a) $P(x^2) = (x^2 + 1)P(x)$
   (b) $P^2 = 4P$
2. Soient P et Q des polynômes vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P^2(x) = xQ^2(x)$. Montrer que P et Q sont nuls.

Exercice 3 (Un produit)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer en regroupant les termes par degré le produit des polynômes : $P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$ et $Q(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \ldots + 1$

Divisibilité, divisions euclidiennes

! **Exercice 4.** Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A(x) = x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 1$,
   $B(x) = x^3 - 2$
2. $A(x) = x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 19x - 7$,
   $B(x) = x^2 + 3x - 1$
3. $A(x) = x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 27x + 38$,
   $B(x) = x^2 - x - 7$
4. $A(x) = x^5 - x^2 + 2$,
   $B(x) = x^2 + 1$.

! **Exercice 5** (Que le reste)**.** Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B quand :

1. $A = x^n - 2x^{n-1} + 5$ et $B = x^2 - 3x + 2$.
2. $A = x^n - 2x^{n-1} + 5$ et $B = (x - 1)^2$
3. $A = x^n + x^{n-1} + x + 1$ et $B = (x - 1)^2$.

♢ ♡ **Exercice 6** (En général)**.** Soit P un polynôme. Soient a, b deux réels vérifiant $a \neq b$.

1. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(x - a)(x - b)$ en fonction de $P(a), P(b)$
2. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(x - a)^2$ en fonction de $P(a), P'(a)$

Exercice 7 (Polynômes appliqués aux matrices !)**.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A - I_3)^2$.
2. En utilisant la division euclidienne de x^n par $(x - 1)^2$, déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Racines

! **Exercice 8.** Factoriser les polynômes suivants :

1. $P = x^3 - 8$
2. $Q = x^3 - 3x^2 + 4x - 4$
3. $R = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$
4. $S = x^4 - 1$
5. $T = 2x^4 + x^2 - 3$
6. $U = x^3 - 2x^2 + x$

♢ **Exercice 9** (Multiplicité des racines).

1. Quelle est la multiplicité de 1 dans le polynôme P suivant ?

$$P(x) = x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 22x^2 + 17x - 5$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la multiplicité de 2 dans le polynôme P_n suivant ?

$$P_n(x) = nx^{n+2} - (4n+1)x^{n+1} + 4(n+1)x^n - 4x^{n-1}$$

Exercice 10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$ est divisible par $(x-1)^3$.

! **Exercice 11** (La D.E.S. en autonomie, cette fois). Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2}$
2. $\dfrac{x^2+3x+1}{(x-1)^2(x-2)}$

Exercice 12 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 - cas racine double). Soit $P(x) = x^2 - ax - b$ un polynôme ayant une racine double γ. Montrer que la suite $(n\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de l'équation d'inconnue $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0$$

Comme pour les racines simples, on ne montrera - au premier semestre au moins - pas que les suites du théorème (chap 5) sont les seules solutions.

Des propriétés en vrac

Exercice 13 (Rolle itéré). Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ de degré n ayant n racines réelles distinctes.

1. Démontrer que P a $n-1$ racines réelles distinctes.
2. Que dire du polynôme $P^{(k)}$?
3. Reprendre les questions si l'on suppose simplement que P a n racines (pas nécessairement distinctes).

♢ **Exercice 14.** Montrer qu'un polynôme périodique est constant.
Indication : on pourra considérer le polynôme $Q(x) = P(x) - P(0)$

Culturel

♡ **Exercice 15** (Interpolation de Lagrange). Soit $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts.
Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on définit le polynôme L_i par : $\forall x \in \mathbb{R},\quad L_i(x) = \prod_{k\in[\![0,n]\!],k\neq i} \frac{x-a_k}{a_i-a_k}$

1. Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$. Que vaut $L_i(a_j)$?
   Indication : on pourra distinguer les cas $i = j$ et $i \neq j$
2. Soit $b_0, \dots, b_n$ des réels. On pose $P = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i L_i$.
   Montrer que P est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ vérifiant : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P(a_k) = b_k$.

Exercices corrigés

Exercice 4.

1. $A(x) = (x^2 - x + 1)B(x) + (2x^2 - 4x + 3)$
2. $A(x) = (x^2 + 2x + 7)B(x)$
3. $A(x) = (x^2 - 3x - 5)B(x) + (5x + 3)$
4. $A(x) = (x^2 - x - 1)B(x) + (x + 3)$

Exercice 5.

1. D'après le théorème de division euclidienne, il existe Q, R des polynômes où R est de degré au plus 1 tels que $A = BQ + R$. On écrit R sous la forme $ax + b$ où a, b sont des réels.De plus, $B(x) = (x - 1)(x - 2)$
$$A(x) = Q(x)(x - 1)(x - 2) + ax + b$$
En évaluant en 1 : pour tout $n \geqslant 1$, $A(1) = 1^n - 2 \times 1^{n-1} + 5 = 4 = a + b$ et $A(2) = 2^n - 2 \times 2^{n-1} + 5 = 5 = 2a + b$
On en déduit : $a = 1$ et $b = 3$ d'où $\boxed{R(x) = x + 3}$
2. Avec les mêmes notations. Pour $n \geqslant 2$, $A(x) = (x - 1)^2 Q(x) + ax + b$ et $A(1) = 4 = a + b$. De plus, $A'(x) = (x - 1)^2 Q'(x) + 2(x - 1)Q(x) + a$ donc $A'(1) = n - 2(n - 1) = -n + 2 = a$. On en déduit : $a = -n + 2$ et $b = 4 - a = 2 + n$ d'où $\boxed{R(x) = (2 - n)x + (2 + n)}$
3. Avec les mêmes notations. Pour $n \geqslant 2$, $A(1) = 4 = a + b$ et $A'(1) = n + (n - 1) + 1 = 2n = a$. On en déduit : $a = 2n$ et $b = 4 - a = 4 - 2n$ d'où $\boxed{R(x) = 2nx + (4 - 2n)}$

Exercice 8.

1. $P(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
2. $Q(x) = (x - 2)(x^2 - x + 2)$
3. $R(x) = (x - 1)^2(x + 4)$
4. $S(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$
5. $T(x) = (x^2 - 1)\left(x^2 + \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(x + 1)\left(x^2 + \frac{3}{2}\right)$
6. $U(x) = x(x - 1)^2$

Exercice 11.

1. $\frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2} = 1 + \frac{5x+3}{(x-1)(x-2)} = 1 + \frac{13}{x-2} - \frac{8}{x-1}$
2. $\frac{x^2+3x+1}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{10}{x-1} - \frac{5}{(x-1)^2} + \frac{11}{x-2}$