Feuille d'exercices n°12

◇ **Exercice 1** (Vrai/Faux). Justifier toute réponse «faux» par un **contre exemple**

1. Deux événements incompatibles sont indépendants.
2. Deux événements indépendants sont incompatibles.
3. Si $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$, alors $A = \overline{B}$
4. Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
5. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ deux systèmes complets d'événements. Alors $(A_n \cap B_p)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est un système complet d'événements.

Univers, événements

Exercice 2. Une urne contient 3 jetons numérotés de 1 à 3. Décrire l'univers des expériences aléatoires suivantes et préciser son cardinal.

1. Tirer successivement et avec remise deux jetons dans cette urne.
2. Tirer successivement et sans remise deux jetons dans cette urne.
3. Tirer simultanément deux jetons dans cette urne.

Exercice 3. Dans une communauté Ω, on choisit un individu au hasard et on considère les événements suivants : A (resp. B, C) « l'individu parle allemand (resp. espagnol, italien) ». Décrire les événements suivants à l'aide de A, B, C.

1. « L'individu parle au moins une des trois langues »
2. « L'individu parle les trois langues »
3. « L'individu ne parle pas espagnol »
4. « L'individu ne parle aucune des trois langues »
5. « L'individu parle exactement deux des trois langues »

Probabilité

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une expérience aléatoire dont l'univers est $[|1; n|]$ et on suppose qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ telle que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ | \forall k \in [|1; n|], \mathbb{P}([|1; k|]) = \lambda k^2$$

Déterminer, pour tout $k \in [|1; n|]$, la probabilité de l'évènement $\{k\}$ (en explicitant la valeur de λ).

◇ **Exercice 5.** Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires. On tire successivement 3 boules en procédant ainsi : si on tire une boule noire, on l'enlève, si on tire une boule blanche, on l'enlève et on rajoute une boule noire à la place.
Quelle est la probabilité de tirer 3 boules blanches ? 3 boules noires ?

◇ **Exercice 6.** Une élève (non interne) a le choix entre quatre chemins A, B, C, D pour aller au lycée. La probabilité pour qu'elle choisisse A (resp. B, C) est $1/3$ (resp. $1/4, 1/12$). La probabilité d'arriver en retard en passant par A (resp. B, C) est $1/20$ (resp. $1/10, 1/5$). En passant par D, elle n'est jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité que l'élève choisisse D ?
2. Quelle est la probabilité que l'élève arrive en retard ?
3. L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'elle soit passée par C ?

◇ **Exercice 7.** Deux joueurs A et B jouent aux échecs. Le joueur B gagne la première partie. Ensuite, la probabilité que A remporte la partie sachant qu'il a remporté la précédente est de $\frac{3}{5}$; alors que la probabilité que B remporte la partie sachant qu'il a remporté la précédente est de $\frac{1}{2}$.

1. Si la troisième partie est remportée par A, quelle est la probabilité qu'il ait également remporté la deuxième partie ?
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, p_n$ la probabilité que A remporte la n-ième partie. Déterminer le terme général de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 8 (Anniversaires)**.** Votre prof de maths vous propose de parier avec vous que deux des élèves de la classe ont le même anniversaire.

1. En ECG1, il y a 43 élèves : acceptez-vous le pari ?
2. Pour quels nombres n d'élèves dans la classe accepteriez-vous ce pari ? (Pour cette question, on peut utiliser un outil numérique pour le calcul).
3. Question bonus : est-ce qu'il y a vraiment deux élèves de la classe qui ont le même anniversaire ?

Exercice 9. Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour la correctrice la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?
Si $p = 0.5$, combien de réponses faut-il mettre à chaque question pour qu'un·e élève qui réponde juste connaisse la réponse avec une probabilité supérieure à 0.8 ?

Indépendance

Exercice 10.
1. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard, et on considère les événements : A : «tirage d'un nombre pair» et B : «tirage d'un multiple de 3»
   (a) Décrire l'univers, la fonction de probabilité et les événements A et B
   (b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Reprendre les questions avec une urne contenant 13 boules.

Exercice 11. Un couple de parents a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On suppose qu'il y a équiprobabilité pour qu'un enfant soit une fille ou un garçon. On considère les évènements :

- A : « les deux enfants sont de sexes différents »
- B : « l'aîné·e est une fille »
- C : « le/la cadet·te est un garçon »

Montrer que les évènements A, B, C sont deux à deux indépendants. Sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 12. Un service après-vente reçoit des appels concernant un produit A avec probabilité 30% et un produit B avec probabilité 70%, et ce, indépendamment d'un appel à l'autre. Dix clients appellent dans la matinée.

1. Déterminer la probabilité que les 10 appels concernent le produit A.
2. Déterminer la probabilité pour que le premier appel concernant le produit A soit le 5-ième appel reçu.

♠ **Exercice 13** (Cardinal de l'univers pour avoir des événements mutuellement indépendants.)**.** Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un univers fini. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements **mutuellement indépendants** tels que pour tout $k \in [|1; n|], \mathbb{P}(A_k) \in]0; 1[$

1. Soit $B_1, \ldots, B_n$ une famille d'événements avec pour tout $k \in [1; n|]$, $B_k = A_k$ ou $B_k = \overline{A_k}$. Montrer que $B_1 \cap \ldots \cap B_n \neq \varnothing$
2. Soient $(B_1, \ldots, B_n)$ et $(C_1, \ldots, C_n)$ des familles **différentes** d'événements vérifiant les conditions de la question précédente.
   Montrer que $B_1 \cap \ldots \cap B_n$ et $C_1 \cap \ldots \cap C_n$ sont disjoints.
3. En déduire : $\mathrm{card}(\Omega) \geqslant 2^n$
4. Quelle est la taille minimale d'un univers sur lequel on trouve 3 événements mutuellement indépendants non triviaux ?