Chapitre 13 : Variables aléatoires

Proba 2

I. Variable aléatoire

1. Définition, notations

Définition 1. On appelle **variable aléatoire réeelle** toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$. On notera (comme pour les applications en général) $X(\Omega)$ son image. Comme Ω est un ensemble fini, $X(\Omega)$ est aussi fini.

Exemples.
- Taille d'un élève choisi au hasard dans la classe.
- Nombre de Face parmi 10 lancers de pièce équilibrée.
- Somme de deux dés équilibrés.

Exemple. Dans ce troisième exemple, on veut calculer la probabilité d'avoir 7 : on doit alors analyser la préimage de 7 par X : $X^{-1}(\{7\}) = \{(1;6);(2;5);(3;4);(4;3);(5;2);(6;1)\}$ et sommer les probabilités de tous ces éléments :

$$\mathbb{P}(X^{-1}(\{7\}) = \sum_{\omega \in X^{-1}(\{7\})} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

Notation. Un abus de notation utilisé (tout le temps !) en probas : $\mathbb{P}(X = 7)$ pour $\mathbb{P}(X^{-1}(\{7\}))$, $\mathbb{P}(X \in A)$ pour $\mathbb{P}(X^{-1}(A))$

Exemple. Cas particuliers $X \leqslant 0$, $X \geqslant a$, $a \leqslant X \leqslant b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

Remarque. Ne pas confondre la **variable aléatoire** X (qui est une application), **l'événement** $X = 7$ (qui est un ensemble), la **probabilité** $\mathbb{P}(X = 7)$ (qui est un nombre) ... Les notations suivantes ont-elles un sens ?

1. $\mathbb{P}(X = 7) \cup \mathbb{P}(X = 8)$
2. $\mathbb{P}(X)$
3. $\mathbb{P}((X \geqslant 7) \cap (X \leqslant 10))$
4. $\mathbb{P}((X = 2) + (X = 1))$

Remarque. On peut alors oublier Ω et vivre dans $X(\Omega)$, c'est-à-dire dans $\mathbb{R}$. La modélisation «expérience» devient transparente. Les abus de notation permettent presque de ne plus considérer X comme une fonction mais comme un « nombre aléatoire ». On ne vérifiera alors plus forcément que Ω est fini mais que $X(\Omega)$ l'est.

2. Système complet d'événements associé à X

Propriété 2. Si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors $(X = x_1; \ldots, X = x_n)$ forment un système complet d'événements. On dit que c'est le **système complet d'événements associé à** X.

Démonstration.

Propriété 3 (Conséquence)**.** On a ainsi $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$

Exemple. On prend $\Omega = [|1;8|]$ et $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ k & \longmapsto & \begin{cases} k^2 \text{ si } k \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$

Déterminer alors $X(\Omega)$ et le système complet d'événements associé à X. Déterminer les probabilités de ces événements.

II. Loi d'une variable aléatoire

1. Définition

Définition 4. Soit X une variable aléatoire. On appelle **loi de** X la donnée de $X(\Omega)$ et de $\mathbb{P}(x)$ pour chaque $x \in X(\Omega)$

Exemple (Somme de deux dés)**.** On note S la somme de deux dés équilibrés lancés simultanément.

Tableau :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(S = x)$											

Représentation graphique sous forme d'un histogramme.

2. Cas $Y = g(X)$

Définition 5. Si X est une variable aléatoire et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $g : I \to \mathbb{R}$ avec $X(\Omega) \subset I$) une fonction, alors $Y = g \circ X$ est une application (par composition). On la note $g(X)$.

Exemple. On considère notre somme de deux dés précédentes. On gage 5 sur le fait que la somme soit paire (et on perd donc 5 si la somme est impaire). On pose

$$g : \begin{array}{ccc} [|2;12|] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 5 & \text{si } x \text{ est pair} \\ -5 & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

Déterminer la loi du gain $G = g(S)$

3. Lois usuelles

a. Variable aléatoire certaine

Définition 6. On appelle variable aléatoire **certaine** de valeur a une variable X avec

$$X(\Omega) = \{a\} \text{ et } \mathbb{P}(X = a) = 1$$

b. Loi uniforme

Définition 7. On dit que X suit une **loi uniforme** sur $[|1;n|]$ ($n \in \mathbb{N}^*$) si

$$X(\Omega) = [|1;n|] \text{ et } \forall k \in [|1;n|], \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([|1;n|]$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$

c. Loi de Bernoulli

Définition 8. On dit que X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0;1]$ si

$$X(\Omega) = \{0;1\} \text{ et } \begin{cases} \mathbb{P}(X = 1) & = p \\ \mathbb{P}(X = 0) & = 1 - p \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1;p)$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

d. Loi binômiale

Définition 9. On dit que X suit une **loi binômiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$ si

$$X(\Omega) = [|0;n|] \text{ et } \forall k \in [|0;n|], \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$. On note souvent $q := 1 - p$

Remarque. Contextes d'apparition de ces lois :

1. Loi uniforme = situation d'**équiprobabilité**
2. Loi de Bernoulli = **épreuves de Bernoulli** = expérience à deux issues «succès/échec»
3. Loi binômiale (n,p) = répétition de n épreuves de Bernoulli (p) indépendantes.

Exemple. Une machine fabrique 100 pièces. Chaque pièce, indépendamment des autres pièces, peut être défectueuse avec une probabilité $\frac{1}{10}$. On note X le nombre de pièces défectueuses. Exprimer pour tout $k \in [|1;100|]$ la probabilité de l'événement $X = k$.

Exercice. Vérifier que la loi binômiale est bien une loi de probabilité : la somme des probabilités des événements $X = k$ est-elle bien égale à 1 ?

III. Espérance

1. Définition

Définition 10. Soit X une variable aléatoire sur Ω. L'**espérance** de X, notée $E(X)$, est le **nombre réel**

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

Remarque. L'espérance n'est ni plus ni moins qu'une moyenne des valeurs de X pondérées par leurs probabilités. Elle représente donc la valeur prise «en moyenne» par X.

Exercice. Déterminer l'espérance de S définie précédemment, puis celle de $G = g(S)$ (sections $II.1$ et $II.2$)

Définition 11 (Variable aléatoire centrée)**.** Si X est une variable aléatoire vérifiant $E(X) = 0$, on dit que X est **centrée**.

2. Propriétés

Remarque. Les propriétés suivantes sont admises, mais se démontrent en réécrivant $E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$

Propriété 12 (Linéarité)**.** Si X et Y sont deux variables aléatoires sur Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$E(X + \lambda Y) = E(X) + \lambda E(Y)$$

Remarque. Comme d'habitude, deux cas particuliers : $X = 0$, $\lambda = 1$: somme et multiplication par un réel

Propriété 13 (Positivité)**.** Soit X une variable aléatoire vérifiant : $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant 0$. Alors

$$E(X) \geqslant 0$$

Propriété 14 (Croissance)**.** Soient X, Y deux variables aléatoires vérifiant : $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant Y(\omega)$. Alors

$$E(X) \leqslant E(Y)$$

On dit que l'espérance **est croissante**

Démonstration. Linéarité + positivité = croissance

Remarque. Si $f : x \mapsto ax + b$, on peut alors calculer $E(f(X)) = f(E(X))$.

3. Espérance des lois usuelles

♡ **Propriété 15.** Soient $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0; 1]$

1. Si $X = a$ est certaine, alors $E(X) = a$
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$, alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$
3. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $E(X) = p$
4. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$

Démonstration.

4. Théorème de transfert

Remarque. On a montré (linéarité) que si $f : x \mapsto ax + b$, alors $E(f(X)) = f(E(X))$. Et si f n'est pas affine ?

Théorème 16 (Admis)**.** Soit X une variable aléatoire sur Ω et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction.

$$E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$$

Remarque. Ce n'est pas la définition, qui est : $E(f(X)) = \sum_{y\in f(X(\Omega))} y\mathbb{P}(f(X) = y))$

Exemple. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binômiale. Déterminer l'espérance de $X(X - 1)$.

IV. Variance, écart-type

1. Définition

Définition 17. Soit X une variable aléatoire sur Ω. La **variance** de X, notée $V(X)$ est le **nombre réel** positif

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

On appelle **écart-type** de X la quantité $\sigma := \sqrt{V(X)}$

Exemple. Déterminer la variance de G.

Exercice. Que dire si $V(X) = 0$?

2. Formule de Koenig-Huygens

♡ **Propriété 18.** Pour tout X variable aléatoire sur Ω,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Démonstration.

Propriété 19. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire sur Ω.

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Et donc $\sigma(aX + b) = a\sigma(X)$

3. Variable aléatoire centrée-réduite

Définition 20. On dit que X est centrée et réduite si $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = V(X) = 1$

♡ **Propriété 21** (Normalisation)**.** Si X est une variable aléatoire sur Ω d'espérance m et d'écart-type σ, alors $Y := \frac{X-m}{\sigma}$ est une variable aléatoire centrée-réduite.

Démonstration.

4. Variance et écart-type des lois usuelles

♡ **Propriété 22.**

1. Si $X = a$ est certaine, alors $V(X) = 0$
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$, alors $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$
3. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $V(X) = p(1-p)$
4. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $V(X) = np(1-p)$

Démonstration.

Exercice. Loi, espérance et variance d'une variable aléatoire uniforme sur $[|a; b|]$ avec a, b deux entiers.

Tableau récapitulatif des lois usuelles

Nom	Ensemble	Proba	Espérance	Variance
Certaine	$\{a\}$, $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{P}(X = a) = 1$	a	0
Uniforme	$[\|1; n\|], n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli	$\{0; 1\}$	$\mathbb{P}(X = 1) = p, \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1-p)$
Binômiale	$[\|0; n\|], n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$