Feuille d'exercices n°13

Calculs de loi, espérance, variance sur des petites valeurs

Exercice 1. On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance.
2. On pose Y=1/X. Déterminer la loi de Y, et son espérance.
3. On organise le jeu suivant : un joueur paie 10 euros, lance le dé et gagne k^2 euros s'il obtient la face k. On note G le gain de ce jeu.
   Exprimer G à l'aide de X. Quel est le gain moyen de ce jeu ?

◊ **Exercice 2.** Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1, \ldots, 20\}$. Déterminer la loi de $\lfloor\sqrt{X}\rfloor$.

◊ **Exercice 3.** Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

x	-1	0	1	3
$P(X = x)$	3/10	1/2	1/10	1/10

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Déterminer l'espérance et la variance de $Y = 5X + 2$.
3. Déterminer la loi de $Z = X^2$.

Exercice 4 (Loi du max - version 1)**.** On lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Exercice 5. On considère la variable aléatoire X sur Ω dont la loi est donnée par :

k	-3	0	3	5
$P(X = k)$	0,2	0,4	0,3	0,1

1. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$ pour $Y = X^2$.
3. Déterminer $E(Z)$ et $V(Z)$ pour $Z = e^X$.

Exercice 6 (Variable aléatoire indicatrice d'un événement)**.** Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement. On note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire définie par :

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0;1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Trouver un exemple d'événement $A \subset [|1;6|]$ et décrire $\mathbb{1}_A$ la loi associée.
2. Montrer que pour tout A, $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli dont on explicitera le paramètre.
3. Montrer que si A, B sont des événements, alors $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{\mathbb{A}\cap\mathbb{B}}$
4. Montrer que si A, B sont des événements disjoints, alors $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cup B}$. Dans le cas général, exprimer $\mathbb{1}_{A\cup B}$

Pour un n quelconque

◊ **Exercice 7.** Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$. On pose $Y = \frac{1}{1+X}$. Déterminer l'espérance de Y.

◊ **Exercice 8** (Loi du max - version 2)**.** On tire deux boules au hasard, une par une et sans remise, dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On appelle S la variable aléatoire égale au plus grand des deux numéros obtenus.

1. Déterminer $S(\Omega)$ puis, pour tout $k \in S(\Omega)$, déterminer $P(S \leq k)$.
2. En déduire la loi de S.

Exercice 9. Une entreprise souhaite recruter un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0,1[$. On pose également $q = 1 - p$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k-ième candidat qui passe le test est engagé, et $X = n+1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X
2. En dérivant la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} x^k$, calculer $\sum_{k=1}^{n} kx^{k1}$ pour $x \neq 1$.
3. En déduire l'espérance de X. Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ?

Un problème - ESCP 2010

Exercice 10. Un mobile se déplace aléatoirement le long d'un axe horizontal d'origine O, sur des points à coordonnées entières, positives ou nulles. Les déplacements sont effectués selon le protocole suivant :

À l'instant zéro, le mobile est sur l'origine O, d'abscisse 0 ;

pour tout entier naturel n, si le mobile se trouve à l'instant n sur le point d'abscisse k $(0 \leqslant k \leqslant n)$, alors il sera à l'instant $n+1$, soit sur le point d'abscisse $k+1$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$, soit sur le point O avec la probabilité $\frac{2}{3}$. Pour tout entier naturel n, soit X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n.

1. Quelle est la loi de X_0 ?
2. Déterminer la loi de X_1. Que valent $E(X_1)$ et $V(X_1)$?
3. (a) Déterminer $X_2(\Omega)$.
   (b) À l'aide du système complet d'événements $\{[X_1 = 1], [X_1 = 0]\}$, déterminer la loi de X_2.
   (c) Calculer $E(X_2)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer l'univers-image de X_n.
   (b) Montrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X_n = k) = \frac{1}{3} P(X_{n-1} = k-1)$.
   (c) En déduire que $P(X_n = 0) = \frac{2}{3}$.
5. (a) Montrer par récurrence sur k que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X_n = k) = (\tfrac{1}{3})^k P(X_{n-k} = 0)$$
   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $P(X_n = n)$ en fonction de n.
   (c) Donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire X_n.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $E(X_n) = \frac{1}{3} E(X_{n-1}) + \frac{1}{3}$.
7. Déterminer l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n.