Devoir Maison n°10 - Déplacement d'un mobile (Edhec 2006)

On considère un mobile qui se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0).

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors à l'instant $n+1$ il sera :

- sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec probabilité $\frac{k+1}{k+2}$
- sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n. On a donc : $X_0 = 0$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace $(\Omega, \mathbb{P})$ et on pose $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

On admet finalement : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

1. Vérifier que $X_1(\Omega) = \{0; 1\}$ puis donner la loi de X_1
2. Déterminer de même la loi de X_2
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) = [|0; n|]$
4. (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [|1; n|], \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{k}{k+1}\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) \tag{1}$$
   (b) En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [|0; n|], \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{k+1}u_{n-k}$$
   (c) En remarquant que $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) = 1$ (à justifier !), montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$$
   (d) En utilisant les valeurs de u_0, u_1, u_2, déterminer la valeur de u_3
5. (a) En remarquant que la relation 1 peut se réécrire $(k+1)\mathbb{P}(X_n = k) = k\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1)$, montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, E(X_n) - E(X_{n-1} = u_n$$
   (b) Grâce à un télescopage, en déduire une écriture de $E(X_n)$ en fonction des termes de la suite (u_n)
   (c) Pour tout entier n non nul, montrer :
$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} = u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$$
   Déduire de ces deux résultats : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}$
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $j \in [|0; n-1|]$, $\frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)} \geq \frac{u_j}{(n-j)(n+1)}$.
   En déduire $u_n \geq \frac{1}{n+1}$
   (e) Déterminer finalement la limite de $E(X_n)$.