Devoir Maison n°9 - Une urne (Écricome 2019)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne en procédant ainsi :

- Si une boule blanche est tirée, elle est remise dans l'urne et on ajoute une boule noire dans l'urne.
- Si une boule noire est tirée, elle est remise dans l'urne et on ajoute une boule blanche dans l'urne.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la variable aléatoire X_k représentant le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après le k-ième tirage, c'est-à-dire juste avant d'effectuer le $(k+1)$-ième tirage. On a en particulier $X_0 = 1$.

Partie A - Analyse

1. Déterminer la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance.
2. Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{6}$$

3. Préciser, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'univers-image $X_k(\Omega)$ de la variable X_k.
4. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. Déterminer la valeur de $\mathbb{P}_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$.
   On distinguera différents cas selon les valeurs relatives de i et j

   (b) En déduire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i) + \frac{3+k-i}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i-1) \qquad (\star)$$

5. À l'aide de la formule $(\star)$, déterminer la loi de X_3.
6. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_k = 1) = \dfrac{1}{(k+1)!}$.
7. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathbb{P}(X_k = k+1)$.
8. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}(X_k = 2)$ et $b_k = a_k + k + 2$.

   (a) Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k.

   (b) Montrer que la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

   (c) En déduire alors que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = 2) = \dfrac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}$.
9. (a) À l'aide de la formule $(\star)$, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2}E(X_k) + 1$$

   (b) Déduire de ce qui précède que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(X_k) = \frac{k+2}{2}$.

   (c) Soit Y_k la variable aléatoire représentant le nombre de boules noires présentes dans l'urne après le k-ième tirage. Justifier que X_k et Y_k ont même espérance, puis retrouver le résultat précédent.

Partie B - Simulations

Rappel : ceci est un devoir maison. Pensez à recopier les codes et les exécuter dans Python (avec Pyzo, par exemple) sur votre ordinateur pour vérifier (après avoir réfléchi) que vos réponses sont cohérentes !

1. (a) Que renvoie la fonction Python suivante pour un entier k non nul ?

```python
import random as rd

def mystere(k):
    n=1
    b=1
    for i in range(k):
        r = rd.randint(1,b+n)
        if r <= b:
            n=n+1
        else:
            b=b+1
    return b
```

(b) Écrire une fonction Python loi_empirique d'arguments k et N (deux entiers strictement positifs). Cette fonction doit effectuer N simulations de k tirages successifs dans l'urne, et retourner une matrice ligne L de taille $k+1$ dont le i-ème coefficient contient la fréquence d'apparition de l'événement $(X_k = i)$, pour $i \in [\![1, k+1]\!]$.
On pourra utiliser la fonction `mystere` de la question précédente.
La matrice L contient alors une estimation de la loi de la variable aléatoire X_k.

(c) Recopier et compléter la fonction Python loi_theorique suivante, d'argument strictement positif n qui calcule la matrice de taille $(n, n+1)$ dont le coefficient (k, i) est $\mathbb{P}(X_k = i)$, puis retourne le vecteur :

$$(\mathbb{P}(X_n = 1), P(X_n = 2), \ldots, \mathbb{P}(X_n = n+1))$$

```
import numpy as np

def loi_theorique(n):
    M=np.zeros((n+1,n+1))
    M[1,1] = 0.5
    M[1,2] = 0.5
    for k in range(2,n+1):
        M[k,1] = .........
        for i in range(2,k+2):
            M[k,i] = .........
    return M[n-1,:]
```

Note : la commande Python A [i, :] extrait de la matrice A la (i+1)-ème ligne.

(d) Une étudiante propose comme loi de X_5 le résultat suivant :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_5 = k)$	0.001368	0.079365	0.419434	0.418999	0.079454	0.00138

A-t-elle utilisé la fonction loi_empirique ou la fonction loi_theorique ?