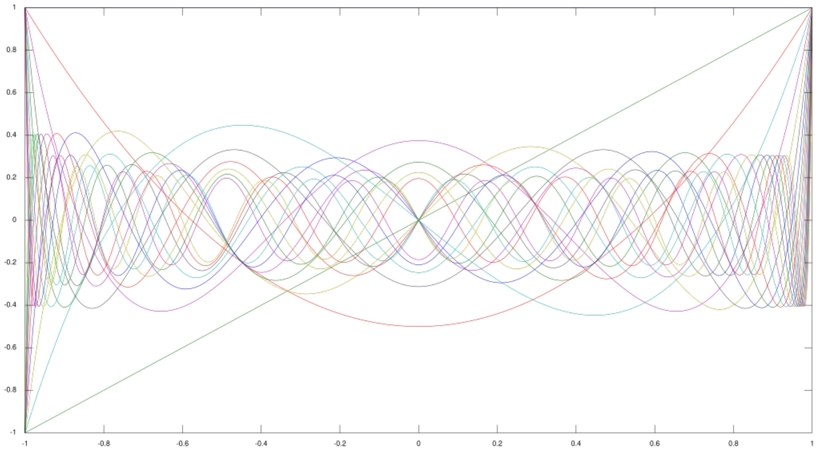
Devoir Maison n°8 - Deux familles de polynômes

Polynômes de Legendre



On s'intéresse à une famille de polynômes appelés **polynômes de Legendre** définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $P_n(x) = ((x^2-1)^n)^{(n)}$ (c'est-à-dire $(x^2-1)^n$ dérivé n fois).

Remarque culturelle : ces polynômes, qui sont les solutions d'une famille d'équations différentielles, sont utilisées en calcul numérique pour approximer des intégrales.

1. Calculer P_0, P_1, P_2
   $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = (x^2-1)' = 2x$, $P_2(x) = ((x^2-1)^2)'' = (x^4-2x^2+1)'' = (4x^3-4x)' = 12x^2-4$
   Remarque : on s'autorise à la notation $'$ autour d'une expression du fait de la confusion pour les polynômes entre P et $P(x)$
2. Déterminer pour tout n le degré de P_n.
   Pour tout entier n, du fait de la propriété sur le degré d'un produit de polynôme, le degré de $(x^2-1)^n$ est $2n$. En dérivant n fois, on perd n degrés : $\deg(P_n) = 2n - n = n$
3. Montrer que le coefficient dominant de P_n est $\frac{(2n)!}{n!}$
   Le coefficient dominant de $(x^2-1)^n$ est 1 : ce polynôme est donc de la forme $x^{2n} + Q(x)$ où Q a un degré strictement inférieur à $2n$. Montrons par récurrence qu'alors après k dérivations, on obtient $\frac{(2n)!}{(2n-k)!}x^{2n-k} + Q_k(x)$ où Q_k est de degré strictement inférieur à $2n-k$.

   — Initialisation : pour $n = 0$, on dérive 0 fois, et on a déjà montré cette forme avec $Q_0 = Q$ et $\frac{(2n)!}{(2n-0)!} = 1$

   — Hérédité : soit $k \in [|0; n-1|]$ vérifiant cette formule. Alors,

   $$\begin{aligned}((x^2-1)^n)^{(k+1)} &= \left(\frac{(2n)!}{(2n-k)!}x^{2n-k} + Q_k(x)\right)' \\ &= \frac{(2n)!}{(2n-k)!}(2n-k)x^{2n-k-1} + Q_k'(x) \\ &= \frac{(2n)!}{(2n-(k+1))!}x^{2n-(k+1)} + Q_{k+1}(x)\end{aligned}$$

   où $Q_{k+1} = Q_k'$. $\deg(Q_k) < 2n-k$ donc $\deg(Q_k') = \deg(Q_k) - 1 < 2n-k-1 = 2n-(k+1)$
   Ainsi, la récurrence est établie.

   — Conclusion : pour tout $k \in [|0; n|]$, $((x^2-1)^n)^{(k)} = \frac{(2n)!}{(2n-k)!}x^{2n-k} + Q_k(x)$ avec $\deg(Q_k) < 2n-k$. Pour $k = n$, on obtient donc $P_n = ((x^2-1)^n)^{(n)} = \frac{(2n)!}{(2n-n)!}x^{2n-n} + Q_n$.
   Puisque $\deg(Q_n) < n$, alors le coefficient dominant est $\frac{(2n)!}{n!}$
4. Pour $0 \leq p \leq n$, on pose $Q_p(x) = ((x^2-1)^n)^{(p)}$. Quel est le degré de Q_p ? Démontrer que Q_p admet deux racines d'ordre $n-p$ et p racines d'ordre 1. Toutes ces racines sont dans $[-1; 1]$
   Avec le résultat de la question précédente, on sait que $\deg(Q_p) = 2n - p$.
   Démontrons le résultat précédent par récurrence sur p en utilisant le théorème de Rolle.

   — Initialisation : pour $p = 0$, on a $Q_0(x) = (x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$. Q_0 a deux racines d'ordre n (1 et -1) et n'a pas d'autres racines. La propriété est donc initialisée.

   — Hérédité : soit $p \in [|0; n-1|]$ tel que $Q_p = ((x^2-1)^n)^{(p)}$ ait deux racines, 1 et -1, d'ordre $n-p$, et p autres racines $x_1 < x_2 < \ldots < x_p$ entre -1 et 1.
   Par définition de la multiplicité, puisque $Q_{p+1} = Q_p'$, alors 1 et -1 sont des racines de multiplicité $n-p-1 = n-(p+1)$.
   Intéressons-nous maintenant aux autres racines. Posons $x_0 = -1$ et $x_{p+1} = 1$
   Sur chaque intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ pour $i \in [|0; p|]$, on a Q_p un polynôme dérivable, vérifiant $Q_p(x_i) = Q_p(x_{i+1}) = 0$.

D'après le théorème de Rolle, il existe donc c_i tel que $Q'_p(c_i) = Q_{p+1}(c_i) = 0$.
Puisqu'il y a $p+1$ tels intervalles, tous disjoints, donc $p+1$ valeurs $c_0, \dots, c_p$, alors Q_{p+1} a $p+1$ racines simples dans $[-1;1]$. La récurrence est ainsi établie.

— Conclusion : pour tout $p \in [|0;n|]$, Q_p a deux racines (1 et -1) d'ordre $n-p$ et p racines simples dans $]-1;1[$.

5. En déduire que P_n s'annule exactement en n points deux à deux distincts de $]-1;1[$.
D'après la question précédente, puisque $P_n = Q_n$, P_n admet 2 racines d'ordre $n-n=0$ et n racines simples dans $]-1;1[$. C'est donc exactement le résultat demandé.
6. Quelle est la forme factorisée de P_n ?
Puisqu'on connaît le coefficient dominant de P_n, et que P_n admet n racines simples $x_1, \dots, x_n$, alors :

$$P_n = \frac{(2n)!}{n!}\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

C'est un produit de polynômes de degré 1, donc irréductibles : c'est donc la forme factorisée (au maximum) de P_n.
Remarque : on dit que P_n est «scindé à racines simples»

Exercice 2 - polynômes de Tchebychev

On considère la suite (T_n) de polynômes définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \end{cases}$$

1. Expliciter T_2, T_3 et T_4.

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) \boxed{= 2x^2 - 1}$$
$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2-1) - x \boxed{= 4x^3 - 3x}$$
$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) \boxed{= 8x^4 - 8x^2 + 1}$$

2. Déterminer le coefficient dominant et le degré de T_n.
Au vu des résultats précédents, on peut faire la conjecture suivante : $\deg(T_n) = n$ et $CD(T_n) = 2^{n-1}$ (pour $n \geq 1$). Montrons-le par récurrence double.
   (a) Initialisation : pour $n=1$, $n=2$, le résultat se vérifie aisément.
   (b) Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang n **et** au rang $n+1$. Alors, puisque $T_{n+2} = 2xT_{n+1} - T_n(x)$, et que $\deg(T_n) < \deg(T_{n+1})$,
   $$\deg(T_{n+2}) = \deg(2x) + \deg(T_{n+1}) = 1 + (n+1) = n+2$$
   Par ailleurs, puisque le seul coefficient de degré $n+2$ vient du calcul $2x \times T_{n+1}$, $CD(T_{n+2}) = 2CD(T_{n+1}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$ et la récurrence est établie.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(nx) = T_n(\cos x)$.
Par récurrence double.
   (a) Pour $n = 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $\cos(0x) = 1 = T_0(\cos(x))$ et $\cos(1x) = \cos(x) = T_1(\cos(x))$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$ et $\cos((n+1)x) = T_{n+1}(\cos x)$. Alors :
   $$\begin{aligned}\cos((n+2)x) &= \cos((n+1)x + x) \\ &= \cos((n+1)x)\cos(x) - \sin((n+1)x)\sin(x)\end{aligned}$$
   Par ailleurs,
   $$\begin{aligned}\cos(nx) &= \cos((n+1)x - x) \\ &= \cos((n+1)x)\cos(x) + \sin((n+1)x)\sin(x)\end{aligned}$$
   i.e. $\sin((n+1)x)\sin(x) = \cos(nx) - \cos((n+1)x)\cos(x)$ Ainsi,
   $$\begin{aligned}\cos((n+2)x) &= \cos((n+1)x)\cos(x) - (\cos(nx) - \cos((n+1)x)\cos(x)) \\ &= 2\cos((n+1)x)\cos(x) - \cos(nx) \\ &= 2\cos(x)T_{n+1}(\cos(x)) - T_n(\cos(x)) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= T_{n+2}(\cos x)\end{aligned}$$
   Ainsi, $\cos((n+2)x) = T_{n+2}(\cos x)$ et la récurrence est établie.
   On pouvait aussi, dans l'autre sens, partir de la définition de $T_{n+2}(\cos x)$ et remonter les calculs.

4. En déduire que T_n a n racines distinctes, toutes dans $]-1,1[$.

$$\begin{aligned}\cos(nx) = 0 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, nx = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2n} + \frac{k}{n}\pi\end{aligned}$$

Or, pour $k = 0, \dots, n-1$ les x de la forme précédente ont des cosinus différents (tous les x sont distincts entre $\frac{\pi}{2n}$ et $\frac{\pi}{2n} + \pi$). Alors, $\{\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k}{n}\right) | k \in [|0; n-1|]\}$ est l'ensemble des racines de T_n et ces nombres sont tous distincts et à valeurs dans $]-1;1[$ (puisque ce sont des cosinus de nombres qui ne sont pas des multiples de π) : il y a n racines distinctes d'un polynôme de degré n donc ce sont les seules.

5. Factoriser T_n.
D'après la question précédente, T_n a n racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et le coefficient dominant de T_n est 2^n donc :

$$T_n = 2^n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k)$$

6. Montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (1-x^2)T_n^{(2)}(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$

Sans récurrence : on note $\phi_n = T_n \circ \cos$ et d'après la question 3, $\phi_n(x) = \cos(nx)$. Les deux membres de l'égalité sont des fonctions deux fois dérivables et on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\phi_n'(x) = -\sin(x)T_n'(\cos(x)) = -n\sin(nx)$$

puis :

$$\phi_n''(x) = \sin^2(x)T_n''(\cos(x)) - \cos(x)T_n'(\cos(x)) = -n^2\cos(nx)$$

On obtient donc :

$$\sin^2(x)T_n''(\cos(x)) - \cos(x)T_n'(\cos(x)) + n^2T_n(\cos(x)) = 0$$

Puisque $\sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$, on retrouve quasiment la formule voulue, mais seulement pour les nombres de la forme $\cos(x)$. Puisque $x \cos(x)$ prend une infinité de valeurs, le polynôme $(1-x^2)T_n^{(2)} - xT_n' + n^2T_n$ a une infinité de racines et est donc nul. Ainsi pour tout réel x,

$$(1-x^2)T_n^{(2)}(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$