

Feuille d'exercices n°11

Exercice 3 (Un produit). Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer en regroupant les termes par degré le produit des polynômes : $P(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + 1$ et $Q(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \dots + 1$

$P(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$. Ainsi,

$$\begin{aligned} (PQ)(x) &= \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j x^j \right) \\ &= \sum_{0 \leq j, k \leq n} (-1)^j x^{k+j} \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{p=j}^{n+j} (-1)^j x^p \text{ en posant } p = j + k \end{aligned}$$

Pour inverser les deux sommes, on a p allant de 0 à $2n$ et pour chaque p , les deux conditions : $0 \leq j \leq n$ et $j \leq p \leq n+j$. Si $p \leq n$, alors $j \leq p$ et $j \leq n$ se résument à $j \leq p$. Par ailleurs dans ce cas, $j \geq 0$ et $j \geq p-n$ se résument à $j \geq 0$. Dans le deuxième cas, si $p \geq n$, alors $j \leq n$ et $j \geq p-n$. On obtient :

$$(PQ)(x) = \sum_{p=0}^n \sum_{j=0}^p (-1)^j x^p + \sum_{p=n+1}^{2n} \sum_{j=p-n}^n (-1)^j x^p$$

Or, $\sum_{j=0}^p (-1)^j = \frac{1-(-1)^{p+1}}{1-(-1)} = \frac{1}{2}(1-(-1)^{p+1})$ et $\sum_{j=p-n}^n (-1)^j = \frac{(-1)^{p-n} - (-1)^{n+1}}{2} = \frac{1}{2}(-1)^{p-n}(1-(-1)^{2n+1-p}) = \frac{1}{2}(-1)^{p-n}(1-(-1)^{p+1})$. C'est la même chose que dans le premier cas quand $p-n$ est pair, l'opposé sinon. Ainsi, $(PQ)(x) =$

Exercice 7 (Polynômes appliqués aux matrices!). On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculer $(A - I_3)^2$.
On trouve $(A - I_3)^2 = 0_3$
- En utilisant la division euclidienne de x^n par $(x-1)^2$, déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
Utilisons la même méthode qu'aux exercices 5 et 6.
D'après le théorème de division euclidienne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ et un polynôme $R \in \mathbb{R}_1[x]$ de la forme $ax + b$ tels que :

$$x^n = Q(x)(x-1)^2 + ax + b$$

En évaluant cette égalité en 1 on obtient : $1 = Q(1) \times 0 + a + b$, i.e. $a + b = 1$

Dérivons maintenant cette égalité :

$$nx^{n-1} = Q'(x)(x-1)^2 + 2Q(x)(x-1) + a$$

En évaluant en 1 : $n = a$

On sait maintenant : $a = n$ et $b = 1 - n$ i.e. $x^n = Q(x)(x-1)^2 + nx + (1-n)$

En considérant cette égalité formellement, on peut voir (et on en reparlera en fin d'année, et vous l'année prochaine) une égalité similaire au niveau matriciel : pour toute matrice M , $M^n = Q(M)(M - I_3)^2 + nM + (1-n)I_3$. En particulier pour A , puisque $(A - I_3)^2 = 0$,

$$A^n = nA + (1-n)I_3$$

Exercice 10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$ est divisible par $(x-1)^3$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $P_n(x) = nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$. Ce polynôme est divisible par $(x-1)^3$ si et seulement si 1 est racine de P_n de multiplicité au moins 3. Nous allons le vérifier via la caractérisation de la multiplicité par les dérivées successives.

- $P_n(1) = n - (n+2) + (n+2) - n = 0$
- $P'_n(x) = n(n+2)x^{n+1} - (n+2)(n+1)x^n + (n+2)$ donc $P'_n(1) = n(n+2) - (n+2)(n+1) + (n+2) = (n+2)(n - (n+1) + 1) = 0$
- $P''_n(x) = n(n+2)(n+1)x^n - (n+2)(n+1)nx^{n-1}$ donc $P''_n(1) = n(n+2)(n+1) - (n+2)(n+1)n = 0$

Ainsi, 1 est une racine de P_n de multiplicité au moins égale à 3 et donc P_n est divisible par $(x-1)^3$

Exercice 12 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 - cas racine double). Soit $P(x) = x^2 - ax - b$ un polynôme ayant une racine double γ . Montrer que la suite $(n\gamma^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est solution de l'équation d'inconnue $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0$$

Comme pour les racines simples, on ne montrera pas - au premier semestre au moins - que les suites du théorème (chap 5) sont les seules solutions.

Puisque γ est une racine double de P , on sait : $\gamma^2 - a\gamma - b = 0$ et $P'(\gamma) = 2\gamma - a = 0$. Montrons maintenant que (u_n) vérifie bien cette équation. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n &= (n+2)\gamma^{n+2} - a(n+1)\gamma^{n+1} - bn\gamma^n \\ &= \gamma^n ((n+2)\gamma^2 - a(n+1)\gamma - bn) \\ &= \gamma^n \times (n(\gamma^2 - a\gamma - b) + \gamma(2\gamma - a)) \\ &= \gamma^n \times (n \times 0 + \gamma \times 0) \text{ par hypothèses sur } \gamma \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 13 (Rolle itéré). Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ de degré n ayant n racines réelles distinctes.

1. Démontrer que P a $n-1$ racines réelles distinctes.

Notons $x_1, \dots, x_n$ les racines de P . P est dérivable (car c'est un polynôme) et pour tout $i = 1, \dots, n-1$, $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$. Par théorème de Rolle, il existe $c_i \in]x_i; x_{i+1}[$ tel que $P'(c_i) = 0$. Ainsi, P' a $n-1$ racines distinctes (puisqu'elles sont dans des intervalles disjoints).

2. Que dire du polynôme $P^{(k)}$?

Par récurrence immédiate, $P^{(k)}$ a $n-k$ racines distinctes.

3. Reprendre les questions si l'on suppose simplement que P a n racines (pas nécessairement distinctes).

Supposons que P a n racines, mais seulement p racines distinctes ($p \leq n$). Alors, le même raisonnement s'applique pour $p-1$ racines distinctes de P' . Par ailleurs, pour chacune des racines, P' a la même racine avec une multiplicité réduite de 1. On perd donc, en tout, p multiplicités. On a donc en tout : $n - p + p - 1 = n - 1$ racines, distinctes ou non. Le même résultat reste donc valide.

♡ **Exercice 15** (Interpolation de Lagrange). Soit $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit le polynôme L_i par : $\forall x \in \mathbb{R}, L_i(x) = \prod_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, k \neq i} \frac{x - a_k}{a_i - a_k}$

1. Soit $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Que vaut $L_i(a_j)$?

Indication : on pourra distinguer les cas $i = j$ et $i \neq j$

$$L_i(a_j) = \prod_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, k \neq i} \frac{a_j - a_k}{a_i - a_k}$$

Si $k = j$, $\frac{a_j - a_k}{a_i - a_k} = 0$. Or, si $i \neq j$, il y a un $k \neq i$ qui est égal à j : il y a donc un facteur nul dans le produit, et donc $L_i(a_j) = 0$.

Si $i = j$, alors aucun des termes n'est égal à 0, et par ailleurs :

$$L_i(a_i) = \prod_{k \neq i} \frac{a_i - a_k}{a_i - a_k} = \prod_{k \neq i} 1 = 1^n = 1$$

Ainsi, $L_i(a_j) = \delta_i^j$

-
2. Soit $b_0, \dots, b_n$ des réels. On pose $P = \sum_{i=0}^n b_i L_i$.

Montrer que P est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ vérifiant : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_k) = b_k$.

On peut commencer par dire que si un tel polynôme existe, il est effectivement unique. En effet, si deux polynômes P, Q de $\mathbb{R}_n[x]$ coïncident en $a_0, \dots, a_n$, alors ils ont $n+1$ valeurs en commun : $P - Q$ a donc $n+1$ racines et est de degré au plus n . Ainsi, $P - Q = 0$ i.e. $P = Q$. On a ainsi montré l'unicité.

Par ailleurs, montrons que P vérifie cette propriété. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} P(a_k) &= \sum_{i=0}^n b_i L_i(a_k) \\ &= \sum_{i=0}^n b_i \delta_i^k \text{ d'après la question précédente} \\ &= b_k \text{ puisque tous les autres facteurs sont nuls} \end{aligned}$$