
Feuille d'exercices n°12

Exercice 2. Une urne contient 3 jetons numérotés de 1 à 3. Décrire l'univers des expériences aléatoires suivantes et préciser son cardinal.

1. Tirer successivement et avec remise deux jetons dans cette urne.
L'univers est l'ensemble des couples $(a, b) \in [1; 3]^2$, puisque n'importe quel couple (e.g. $(2; 2)$) est possible. $\Omega = [1; 3]^2$
D'après le cours, il y a donc $3^2 = 9$ issues.
2. Tirer successivement et sans remise deux jetons dans cette urne.
Sans remise, on considère plutôt les couples avec $a \neq b$, puisque l'ordre des tirages est important mais il ne peut pas y avoir de répétitions. Il y a alors $3 \times 2 = 6$ issues puisque pour chaque tirage d'un premier jeton, il y a ensuite 2 possibilités.
3. Tirer simultanément deux jetons dans cette urne.
On oublie là l'ordre. Une issue est alors un ensemble $\{a; b\}$ à deux éléments ($a \neq b$). L'ordre ne compte pas. Par rapport à l'expérience précédente, il y a deux fois moins d'issues puisque $(1; 2)$ et $(2; 1)$ deviennent la même issue. Il y a $\binom{3}{2} = 3$ issues.

Exercice 3. Dans une communauté Ω , on choisit un individu au hasard et on considère les événements suivants : A (resp. B , C) « l'individu parle allemand (resp. espagnol, italien) ». Décrire les événements suivants à l'aide de A , B , C .

1. « L'individu parle au moins une des trois langues » : $A \cup B \cup C$
2. « L'individu parle les trois langues » : $A \cap B \cap C$
3. « L'individu ne parle pas espagnol » : $\overline{B}$
4. « L'individu ne parle aucune des trois langues » : $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A \cup B \cup C}$
5. « L'individu parle exactement deux des trois langues » : $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) = ((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)$. Dans la première écriture on donne toutes les possibilités de parler 2 langues mais pas la troisième. Dans la deuxième, on dit que parler exactement 2 langues c'est en parler «au moins 2 mais pas 3»

Exercice 10. 1. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard, et on considère les événements : A : «tirage d'un nombre pair» et B : «tirage d'un multiple de 3»

- (a) Décrire l'univers, la fonction de probabilité et les événements A et B

L'univers est $\Omega = [1; 12]$, muni de la probabilité uniforme.

$A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$, $B = \{3; 6; 9; 12\}$

- (b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Puisque la probabilité est uniforme et $|\Omega| = 12$, $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. De même, $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

De plus, $A \cap B = \{6; 12\}$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Ainsi, A et B sont indépendants.

2. Reprendre les questions avec une urne contenant 13 boules.

Cette fois on a $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{13}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{13}$. $A \cap B$ reste inchangé (puisque 13 n'est divisible ni par 2 ni par 3) donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{13}$. Or, $\frac{4}{13} \times \frac{6}{13} = \frac{24}{169} \neq \frac{26}{169} = \frac{2}{13}$. Ainsi, les deux événements A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 11. Un couple de parents a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On suppose qu'il y a équiprobabilité pour qu'un enfant soit une fille ou un garçon. On considère les événements :

- A : « les deux enfants sont de sexes différents »
- B : « l'aîné·e est une fille »
- C : « le/la cadet·te est un garçon »

Montrer que les événements A , B , C sont deux à deux indépendants. Sont-ils mutuellement indépendants ?

Du fait de l'énoncé, on suppose $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$. $A \cap B$ est l'événement : l'aînée est une fille, le deuxième un garçon. Cet événement a une probabilité de $\frac{1}{4}$ (une possibilité parmi 4 équiprobables) donc

A et B sont indépendants. De même pour les deux autres couples $A \cap C$ et $B \cap C$. Par contre, $A \cap B \cap C$ est le même événement que $A \cap B$, qui est donc de probabilité $\frac{1}{4}$ et pas $\frac{1}{8}$: les trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.



Exercice 13 (Cardinal de l'univers pour avoir des événements mutuellement indépendants.). Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un univers fini. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements **mutuellement indépendants** tels que pour tout $k \in [1; n]$, $\mathbb{P}(A_k) \in]0; 1[$

1. Soit $B_1, \dots, B_n$ une famille d'événements avec pour tout $k \in [1; n]$, $B_k = A_k$ ou $B_k = \overline{A_k}$. Montrer que $B_1 \cap \dots \cap B_n \neq \emptyset$

Supposons par l'absurde $B_1 \cap \dots \cap B_n = \emptyset$. Alors, $\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n) = 0$ et par indépendance mutuelle des B_k (propriété du cours puisque les A_k sont mutuellement indépendants), alors $\mathbb{P}(B_1) \times \dots \times \mathbb{P}(B_n) = 0$. Puisque le produit est nul, un des facteurs est nul. Supposons que pour un certain $k \in [1; n]$, $\mathbb{P}(B_k) = 0$. Alors soit $B_k = A_k$ et $\mathbb{P}(A_k) = 0$, soit $B_k = \overline{A_k}$ et alors $\mathbb{P}(A_k) = 1 - \mathbb{P}(B_k) = 1$. Ces deux situations sont exclues par la précision $\mathbb{P}(A_k) \in]0; 1[$. Ainsi, il y a une contradiction et donc $B_1 \cap \dots \cap B_n \neq \emptyset$

2. Soient $(B_1, \dots, B_n)$ et $(C_1, \dots, C_n)$ des familles **différentes** d'événements vérifiant les conditions de la question précédente.

Montrer que $B_1 \cap \dots \cap B_n$ et $C_1 \cap \dots \cap C_n$ sont disjoints.

Supposons par l'absurde qu'il existe un $\omega \in B_1 \cap \dots \cap B_n \cap C_1 \cap \dots \cap C_n$. Puisque $(B_1, \dots, B_n)$ et $(C_1, \dots, C_n)$ sont différentes, il existe un $k \in [1; n]$ tel que $B_k \neq C_k$. Or, par hypothèse, B_k et C_k sont soit A_k soit $\overline{A_k}$. Puisque B_k et C_k sont différents, alors $B_k \cap C_k = \emptyset$. Or $\omega \in B_k \cap C_k$, ce qui est une contradiction. Ainsi les deux ensembles sont disjoints.

3. En déduire : $\text{card}(\Omega) \geq 2^n$

Il y a 2^n familles différentes vérifiant les conditions de la question précédente. Or, ces 2^n familles permettent, d'après la question précédente, de créer 2^n ensembles inclus dans Ω deux à deux disjoints. Il y a donc dans chacun de ces 2^n ensembles au moins un élément qui n'est dans aucun autre ensemble, donc 2^n éléments tous différents. Ainsi, $|\Omega| \geq 2^n$

4. Quelle est la taille minimale d'un univers sur lequel on trouve 3 événements mutuellement indépendants non triviaux ?

D'après la question précédente, il faut au moins $2^3 = 8$ issues