Feuille d'exercices n°13

Exercice 4 (Loi du max - version 1)**.** On lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
L'expérience est modélisable par l'univers $\Omega = [|1;6|]^2$ muni d'une probabilité uniforme (dés équilibrés). Représentons pour chaque issue $\omega \in \Omega$ la valeur de $X(\omega)$ dans un tableau :

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

On peut alors écrire : $X(\Omega) = [|1;6|]$ (valeurs présentes dans le tableau) et : $\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{36}, \mathbb{P}(X=2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, $\mathbb{P}(X=3) = \frac{5}{36}$, $\mathbb{P}(X=4) = \frac{7}{36}$, $\mathbb{P}(X=5) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(X=6) = \frac{11}{36}$

Exercice 5. On considère la variable aléatoire X sur Ω dont la loi est donnée par :

k	-3	0	3	5
$P(X=k)$	0,2	0,4	0,3	0,1

1. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
   $E(X) = -3 \times 0,2 + 0 \times 0,4 + 3 \times 0,3 + 5 \times 0,1 = 3 \times 0,1 + 5 \times 0,1 = 0,8$
   $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ d'après la formule de Koenig-Huygens. Or, $E(X^2) = 9 \times 0,2 + 0 \times 0,4 + 9 \times 0,3 + 25 \times 0,1 = 9 \times 0,5 + 25 \times 0,1 = 4,5 + 2,5 = 7$
   Ainsi, $V(X) = 7 - 0,8^2 = 7 - 0,64 = 6,36$
2. Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$ pour $Y = X^2$.
   On a déjà calculé précédemment : $E(Y) = 7$. Par ailleurs, $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$. $E(Y^2) = 25^2 \times 0,1 + 9^2 \times 0,5 = 62,5 + 40,5 = 103$. Ainsi, $V(Y) = 103 - 49 = 54$
3. Déterminer $E(Z)$ et $V(Z)$ pour $Z = e^X$.
   Par théorème de transfert, $E(Z) = 0,2 \times e^{-3} + 0,4 \times 0,1 + 0,3 \times e^3 + 0,1 \times e^5$. $E(Z^2) = 0,2 \times e^{-6} + 0,4 \times 1 + 0,3 \times e^6 + 0,1e^{10}$.

$$\begin{aligned} V(Z) &= E(Z^2) - E(Z)^2 \\ &= 0,2 \times e^{-6} + 0,4 \times 1 + 0,3 \times e^6 + 0,1e^{10} - (0,2 \times e^{-3} + 0,4 \times 0,1 + 0,3 \times e^3 + 0,1 \times e^5)^2 \end{aligned}$$

Exercice 6 (Variable aléatoire indicatrice d'un événement)**.** Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement. On note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire définie par :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & \Omega & \longrightarrow & \{0;1\} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

1. Trouver un exemple d'événement $A \subset [|1;6|]$ et décrire $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire associée.
   Par exemple pour $A = \{2;4;5\}$, $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire qui vaut 1 si $x \in \{2;4;5\}$ et 0 sinon. C'est donc une variable aléatoire de Bernoulli, de paramètre $p = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$ $(= \frac{1}{2}$ si la probabilité est uniforme)
2. Montrer que pour tout A, $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli dont on explicitera le paramètre.
   Avec le même raisonnement qu'à la question, puisque $\mathbb{1}_A$ prend les valerus 1 et 0, elle suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$
3. Montrer que si A, B sont des événements, alors $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{\mathbb{A} \cap \mathbb{B}}$
   Soit $x \in \Omega$. Raisonnons par disjonction de cas :

— Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$ donc $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1 \times 1 = 1$. Par ailleurs, puisque $x \in A \cap B$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1$

— Si $x \in A$ et $x \notin B$, alors $x \notin A \cap B$ donc $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$, et $\mathbb{1}_B(x) = 0$ donc $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0$

— Si $x \in B$ et $x \notin B$, alors on peut faire le même raisonnement qu'à la question précédente

— Si $x \notin A$ et $x \notin B$, alors $x \notin A \cap B$ donc $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0$ et $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0 \times 0 = 0$

4. Montrer que si A, B sont des événements disjoints, alors $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cup B}$. Dans le cas général, exprimer $\mathbb{1}_{A\cup B}$
En reprenant un raisonnement par disjonction de cas, on montre la première propriété puisque $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$

Exercice 9. Une entreprise souhaite recruter un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0,1[$. On pose également $q = 1 - p$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k-ième candidat qui passe le test est engagé, et $X = n + 1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X
$X(\Omega) = [|1; n+1|]$.
$\mathbb{P}(X = 1) = p$, d'après l'énoncé.
$X = 2$ signifie que la première personne rate le test, et que la deuxième le réussit. Par hypothèse, on a donc $\mathbb{P}(X = 2) = qp$.
De même, $\mathbb{P}(X = 3) = q^2p$ et pour tout $k \in [|4; n|], \mathbb{P}(X = k) = q^{k-1}p$.
Finalement, $\mathbb{P}(X = n + 1) = q^n$ (probabilité que les n candidats ratent le test).
On peut vérifier que la somme fait bien 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}p + q^n = p\sum_{j=0}^{n-1} q^j + q^n = p \times \frac{1-q^n}{1-q} + q^n = p\frac{1-q^n}{p} + q^n = 1 - q^n + q^n = 1$$

2. En dérivant la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} x^k$, calculer $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour $x \neq 1$.
$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$. On peut donc dériver cette égalité sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ pour dire :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

3. En déduire l'espérance de X. Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ?
Les deux questions ici sont indépendantes.

— $E(X) = \sum_{k=1}^{n+1} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}p + (n+1)q^n = p \times \frac{-(n+1)q^n(1-q)+1-q^{n+1}}{p^2} + (n+1)q^n$

— La probabilité de recruter un candidat est $1 - \mathbb{P}(X = n + 1) = 1 - q^n$. On cherche donc à résoudre :

$$1 - q^n \geq \frac{1}{2}$$

i.e. $q^n \leq 1 - \frac{1}{2} \iff q^n \leq \frac{1}{2} \iff \exp(n\ln(q)) \leq \frac{1}{2} \iff n\ln(q) \leq -\ln(2) \iff \ln(q) \leq -\frac{\ln(2)}{n} \iff q \leq \exp\left(-\frac{\ln(2)}{n}\right) \iff p \geq 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$

Exercice 10. Un mobile se déplace aléatoirement le long d'un axe horizontal d'origine O, sur des points à coordonnées entières, positives ou nulles. Les déplacements sont effectués selon le protocole suivant :

À l'instant zéro, le mobile est sur l'origine O, d'abscisse 0 ;

pour tout entier naturel n, si le mobile se trouve à l'instant n sur le point d'abscisse k $(0 \leqslant k \leqslant n)$, alors il sera à l'instant $n + 1$, soit sur le point d'abscisse $k + 1$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$, soit sur le point O avec la probabilité $\frac{2}{3}$. Pour tout entier naturel n, soit X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n.

1. Quelle est la loi de X_0 ?
   X_0 est une variable aléatoire certaine égale à 0
2. Déterminer la loi de X_1. Que valent $E(X_1)$ et $V(X_1)$?
   X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$. $E(X_1) = \frac{1}{3}$, $V(X_1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$
3. (a) Déterminer $X_2(\Omega)$.
   $X_2(\Omega) = [|0; 1; 2|]$
   (b) À l'aide du système complet d'événements $\{[X_1 = 1], [X_1 = 0]\}$, déterminer la loi de X_2.
   D'après la loi des probabilités totales,
   — $\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 0) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$
   — $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{2}{9}$
   — $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 2) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 2) = \frac{2}{3} + 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
   (c) Calculer $E(X_2)$.
   $E(X_2) = \frac{2}{3} \times 0 + \frac{2}{9} \times 1 + \frac{1}{9} \times 2 = \frac{4}{9}$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer l'univers-image de X_n.
   Par récurrence, on montre aisément que $X_n(\Omega) = [|0; n|]$
   (b) Montrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X_n = k) = \frac{1}{3}P(X_{n-1} = k - 1)$.
   Soit $k \in [|1; n|]$. D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'événements associé à X_{n-1} :
   $$\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1} = j)\mathbb{P}_{(X_{n-1}=j)}(X_n = k)$$
   Or pour $j \neq k - 1$, $\mathbb{P}_{(X_{n-1}=j)}(X_n = k) = 0$ d'après l'énoncé (on ne peut qu'avancer de 1 ou aller en 0). Ainsi :
   $$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_{n-1} = k - 1)\mathbb{P}_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_{n-1} = k - 1)$$
   (c) En déduire que $P(X_n = 0) = \frac{2}{3}$.
   Puisque $(X_n = k)_{0 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements,
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = 0) &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_{n-1} = k - 1) \text{ d'après la question précédente} \\ &= 1 - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_{n-1} = k - 1) \\ &= 1 - \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1} = j) \\ &= 1 - \frac{1}{3} \times 1 \text{ car } X_{n-1}(\Omega) = [|0; n - 1|] \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$
5. (a) Montrer par récurrence sur k que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X_n = k) = (\tfrac{1}{3})^k P(X_{n-k} = 0)$$
   Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k, \mathbb{P}(X_n = k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k \mathbb{P}(X_{n-k} = 0)$.
   — <u>Initialisation :</u> pour $k = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \mathbb{P}(X_n = 0)$

— <u>Hérédité :</u> soit $k \in [|0; n-1|]$ tel que pour tout entier $n \geq k$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k \mathbb{P}(X_{n-k} = 0)$. Alors, $\mathbb{P}(X_n = k+1) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_{n-1} = k) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k \mathbb{P}(X_{n-k} = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$ et la récurrence est établie.

(b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $P(X_n = n)$ en fonction de n.
D'après la question précédente, $\mathbb{P}(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathbb{P}(X_{n-n} = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(c) Donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire X_n.
$X_n(\Omega) = [|0; n|]$. On a montré :

$$\forall k \in [|0; n|], \mathbb{P}(X_n = k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k \mathbb{P}(X_{n-k} = 0)$$

Ainsi, pour $k \leq n-1$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k \times \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $E(X_n) = \frac{1}{3}E(X_{n-1}) + \frac{1}{3}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k) & \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} k\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} (k-1+1)\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) \\
&= \frac{1}{3}\left(\sum_{j=0}^{n-1} j\mathbb{P}(X_{n-1} = j) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1} = j)\right) \\
&= \frac{1}{3}(E(X_{n-1} + 1) = \frac{1}{3}E(X_{n-1}) + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

7. Déterminer l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n.
D'après la question précédente, la suite $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. D'après le cours, la suite $(E(X_n) - \frac{1}{2})$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $E(X_0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E(X_n) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}$$