

CHAPITRE 14 : INTÉGRATION

Analyse 5

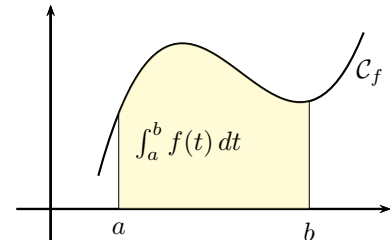
I. Aire sous la courbe

1. Des fonctions positives au cas général

Définition 1. 1. Si $a \leq b$ sont deux réels et que f est continue et positive sur $[a; b]$, on définit l'intégrale de f sur $[a; b]$ comme l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = a, x = b$

2. Si f est négative, on définit de même l'intégrale de f sur $[a; b]$ comme l'opposé de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

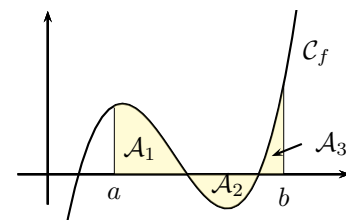
Dessin :



Définition 2. Dans le cas général, on découpe l'ensemble de départ pour compter «en positif» les aires de surfaces au-dessus de l'axe des abscisses et en négatif celles en dessous de l'axe des abscisses. On note l'intégrale de f sur $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Dessin :



$$\int_a^b f(t) dt = A_1 - A_2 + A_3$$

♠ Ces notions de découpages et de calculs d'aires ne seront pas formalisés, toute construction d'une intégrale étant hors programme.

Remarque. Ici x est une **variable muette d'intégration** : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$ et x, t n'existent pas en dehors de l'intégrale !

Exemple. Pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^a f(t) dt = 0$$

Définition 3 (Bornes inversées). Par convention, si $a > b$ on pose

$$\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

Exemples. À partir de la définition (faire un dessin !), calculer les intégrales suivantes :

- $\int_{-2}^4 3 dx$ puis $\int_a^b C dx$, où $a < b$
- $\int_0^1 x dx$ puis $\int_1^0 x dx$
- $\int_{-2}^2 |x| dx$

2. Propriétés de l'intégrale

Propriété 4 (Relation de Chasles). Pour a, b, c réels et f continue sur un segment contenant a, b, c :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Remarque. Cette illustration se fait dans le cas $a < c < b$ mais la formule est vraie dans tous les cas de figure, grâce à la convention $\int_b^a = - \int_a^b$. Cette propriété se généralise à des points $a_1, \dots, a_n$.

Propriété 5 (Positivité). Si f est une fonction positive continue sur $[a; b]$ (avec $a < b$), alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$. Ceci découle directement de la définition de l'intégrale comme une aire.

Propriété 6 (Variante).

- Si f est continue et strictement positive, alors son intégrale est strictement positive.
- Si f est continue et positive et vérifie $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors $f = 0$

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$. Justifier que la suite (I_n) est positive.

Remarque. Si $b < a$, l'inégalité est inversée !

Propriété 7 (Linéarité). Pour λ, μ des réels et f, g continues sur $[a; b]$ (ou sur $[b; a]$),

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

Remarque. En général, $\int_a^b f(t)g(t)dt \neq \left(\int_a^b f(t)dt\right) \times \left(\int_a^b g(t)dt\right)$: **comme pour les sommes**, faire attention !

Propriété 8 (Linéarité + positivité = croissance). Si f, g sont deux fonctions continues sur $[a; b]$ avec $a < b$ vérifiant $f \leq g$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Exercice. 1. Étudier les variations de la suite (I_n) définie précédemment. Montrer que (I_n) converge.

2. On admet : $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ (voir plus loin dans le chapitre). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \frac{1}{n+1}$

3. Déterminer la limite de la suite I_n

Propriété 9 (Cas particulier). Soient $a < b$ et f continue sur $[a; b]$. D'après le théorème des bornes, f admet un minimum et un maximum : posons $m = \min_{[a; b]} f$ et $M = \max_{[a; b]} f$. Alors,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a)M$$

♡ **Propriété 10** (Inégalité triangulaire intégrale). Si $a < b$ et que f est une fonction continue sur $[a; b]$, alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Démonstration. Idée : encadrer f par $-|f|$ et $|f|$

Remarque. Attention à l'ordre des bornes dans cette propriété !

II. Primitive d'une fonction continue

1. Théorème fondamental de l'analyse

♡ **Théorème 11.** Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ Alors

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

- F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$
- $F' = f$, i.e. $\forall x \in [a; b], F'(x) = f(x)$. On dit que F est **une primitive** de f

Démonstration. Non exigible. Dessin en classe, complément de cours.

♡ *Exercice.* Soit u une fonction dérivable sur $[a; b]$ et $G : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t) dt$$

Montrer que G est dérivable et calculer sa dérivée.

Exemple :

$$\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$$

2. Conséquences

Propriété 12. Les propriétés suivantes se déduisent du théorème fondamental de l'analyse :

- Toute fonction continue admet une primitive.
- Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante
- F définie comme dans le théorème 11 est **l'unique primitive** de f qui s'annule en a

Propriété 13. Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ et F une primitive de f , alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \underset{\text{not.}}{=} [F(t)]_a^b$$

♣ *Exercice.* Ceci aurait donc pu être la définition de l'intégrale : vérifier alors

1. Que cette définition ne dépend pas du choix de F (si G est une autre primitive de f on a quand même $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$)
2. Que l'intégrale ainsi définie est bien linéaire, positive, et vérifie la relation de Chasles.

♡ **3e Formulaire :** si on sait primitiver, intégrer est simple. Pour primitiver, il faut surtout ... bien savoir dériver !

Forme de la fonction	Forme des primitives	Forme de la fonction	Forme des primitives
0	k	$\sin(x), \cos(x)$	
$a, a \in \mathbb{R}$		$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x)) + k$
$x^n, n \in \mathbb{N}$		$\frac{1}{1+x^2}$	
$x^\alpha, \alpha \neq -1$		$\frac{u'}{u}$	
$\frac{1}{x}$		$u' \times u$	
e^x		$u' \times u^\alpha, \alpha \neq -1$	
$a^x, a > 0$		$u'e^u$	
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x + k$	$\frac{u'}{1+u^2}$	

Dans ces tableaux, k est un réel quelconque (constantes d'intégration). **Attention :** si on primitive sur une **union d'intervalles** (ex : $\tan$ sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}; 3\frac{\pi}{2}[$) : une constante par intervalle !

Exercice. Déterminer des primitives de f, g, h définies (sur quels ensembles?) par

- $f(x) = 5 + \frac{1}{3\sqrt{x}}$
- $g(x) = \frac{4}{3x+1}$
- $h(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$

III. Méthodes de calcul d'intégrales

1. En trouvant une primitive

Exemples. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-2}^0 (2x^3 - x + 1)dx$
2. $\int_0^1 xe^{-x^2}$
3. $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln(t)}{t} dt$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos(3x))dx$
5. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)dx$
6. $\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx$

2. Théorème d'intégration par parties



Théorème 14. Soient $a, b \in I$ et $u, v \in \mathcal{C}^1(I)$. Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Démonstration. Conséquence de la formule de dérivation du produit

Exemple. Déterminer une primitive de la fonction arctan en calculant pour $x \in \mathbb{R}$ $\int_0^x \arctan(t)dt$ par intégration par parties.

Exemples. Calculer $\int_0^1 xe^{-x}$ et $\int_1^e x^2 \ln(x)dx$.

Ces intégrales sont des cas particuliers de $x^n e^{-x}$ (dériver x^n) et $\ln(x)x^n$ (dériver $\ln(x)$) - voir TD

3. Théorème de changement de variable

Théorème 15. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et f une fonction continue sur $\varphi(I)$. Alors, pour tous a et b de I , on a :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

Démonstration.

- Remarque.*
- Lorsqu'un changement de variable n'est pas affine, il sera précisé dans l'énoncé.
 - On retiendra qu'en posant le changement de variable $u = \varphi(t)$, on substitue ainsi :
 $\varphi(t) \leftrightarrow u \quad \varphi'(t)dt \leftrightarrow du \quad t = a \leftrightarrow u = \varphi(a) \quad t = b \leftrightarrow u = \varphi(b)$
 - Si φ est bijective, nous pouvons inverser la relation $u = \varphi(t)$ en $t = \varphi^{-1}(u)$, ce qui permet de simplifier le remplacement de dt ou la détermination des bornes.

Exercice. Calculer

1. $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$ en posant $x = \sqrt{t}$ 2. $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)} dt$ en posant $x = \cos(t)$ 3. $\int_1^e \frac{dt}{2t \ln(t)+t}$ en posant $x = \ln(t)$

4. Sommes de Riemann

Théorème 16. Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *sommes de Riemann* associées à f sur $[a, b]$ les sommes :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Alors, les suites des sommes de Riemann $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ associées à f convergent vers $\int_a^b f(t)dt$.

Démonstration. Dans le cas particulier de $f \in \mathcal{C}^1(I)$ seulement.

Remarque. Ce théorème sert parfois à déterminer la limite d'une suite faisant intervenir une somme, mais aussi à approximer numériquement une intégrale : **méthode des rectangles**.

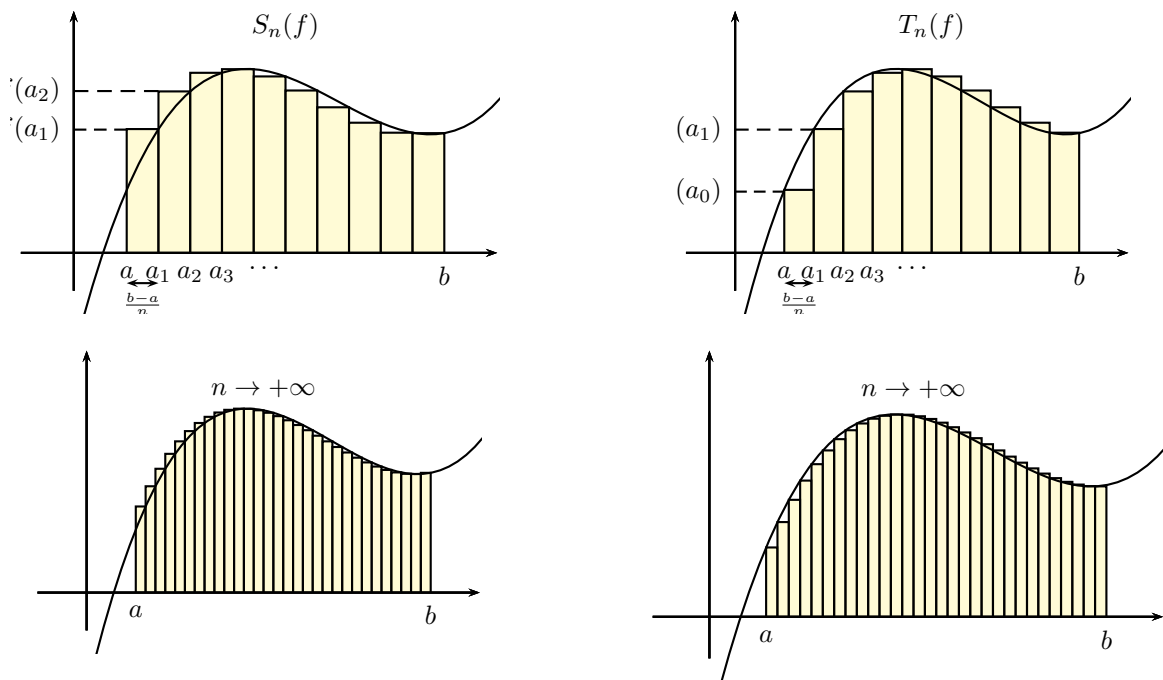
Exemple. Cas particulier : pour $a = 0$ et $b = 1$,

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Exemple. Compléter le code ci-dessous pour qu'il affiche une valeur approchée de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

```
from math import *
def f(x):
    return .....
def methode_rectangles(n):
    s = .....
    for k in range(...):
        s = .....
    return .....
print(methode_rectangles(1000))
```

Dessin :



Exemple. Calculer la limite de la suite (u_n) donnée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1}{n} \left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right) \right)$$

IV. Extension aux fonctions continues par morceaux

Définition 17. On appelle fonction **continue par morceaux** sur $[a; b]$ une fonction f telle qu'il existe $(a_0; \dots, a_n) \in [a; b]^{n+1}$ vérifiant

1. $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$
2. $\forall i \in [0; n-1], f|_{[a_i; a_{i+1}[}$ est continue et admet une limite finie en a_i et en a_{i+1} (prolongement par continuité)

Remarque : cette définition ne dit rien des valeurs de $f(a_0), \dots, f(a_n)$

Définition 18. On définit alors l'intégrale par extension en utilisant la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$$