

Feuille d'exercices n°14

Primitives

Exercice 1. Déterminer, pour chaque intervalle sur lequel elle est définie, une primitive de la fonction f définie par :

- | | | |
|--|-----------------------------|----------------------------|
| 1. $f(x) = 5x^3 - 3x + 7$ | 3. $f(x) = \frac{x+5}{x^2}$ | 5. $\frac{3}{\sqrt{5x+1}}$ |
| 2. $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$ | 4. $f(x) = e^{4x}$ | 6. $(3x-1)(3x^2-2x+3)^2$ |

Exercice 2. Déterminer, pour chaque intervalle sur lequel elle est définie, une primitive de la fonction f définie par :

- | | | |
|--|--------------------------------|--|
| 1. $f(x) = \frac{3x^2}{x^3+1}$ | 3. $f(x) = \sin x \cos x$ | 5. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - x\sqrt{2}$ |
| 2. $f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1+(\ln x)^2}$ | 4. $f(x) = \frac{\ln(x)+1}{x}$ | 6. $f(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{x^2}{4}$ |

Exercice 3 (Équation différentielle). Soient g une fonction continue sur un intervalle I et G une primitive de g sur I . Soit f une fonction dérivable vérifiant $f' = fg$.

1. En posant, pour tout $x \in I$, $C(x) = f(x)e^{-G(x)}$, déterminer la forme générale de la fonction f .
2. Etudier la réciproque.
3. Conclure.

Exercice 4 (Fractions rationnelles - à quoi sert la DES?).

1. On considère pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \frac{5x^2+3x+5}{x^3+x}$.
 - (a) Déterminer les nombres a et b tels que $f(x) = \frac{a}{1+x^2} + \frac{b}{x}$
 - (b) En déduire la primitive de f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1.
2. On considère pour tout x , $f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}$.
 - (a) Déterminer les nombres a, b, c tels que $f(x) = \frac{ax+b}{x^2} + \frac{c}{x+1}$
 - (b) En déduire la primitive de f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1.
3. Faire la division euclidienne de $x^4 - 5x + 1$ par $x^2 - 1$. En s'inspirant des questions précédentes, trouver une primitive de $f : x \mapsto \frac{x^4-5x+1}{x^2-1}$

On retiendra que la DES est utile pour primitiver, et qu'on obtient selon les cas, des fractions rationnelles, des logarithmes et des arctangentes.

Calculs d'intégrales

Exercice 5. Déterminer une primitive de $x \mapsto x \sin(x)$ en intégrant par parties.

Exercice 6 (IPP). Calculer les intégrales suivantes pour $x \in \mathbb{R}$:

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\int_1^e t^2 \ln(t) dt$ | 3. $\int_1^x (\ln t)^2 dt$ | 5. $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$ |
| 2. $\int_1^e t^n \ln(t) dt$ | 4. $\int_1^x \sin(\ln t) dt$ | 6. $\int_0^\pi \sin(t) e^t dt$ |

*Pour certaines de ces intégrales, on pourra faire **deux** intégrations par partie successives.*

◇

Exercice 7. En intégrant par parties, calculer

$$\int_0^1 t(\arctan t)^2 dt$$

Indication : on pourra utiliser $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$

Exercice 8 (Changement de variable). Calculer :

1. $\int_{-1}^1 e^{2x+1} dx$
3. $\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$ (poser $x = -\ln t$)
5. $\int_0^1 \frac{t^2 - 3t + 1}{\sqrt{2t + 3}} dt$
2. $\int_0^1 (3x - 4)^2 dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x} dx$ (poser $u = \sin x$)
6. $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx$

Indication : pour le 4), décomposer la fraction $\frac{1}{u^2 - 5u + 6}$ en $\frac{a}{u-3} + \frac{b}{u-2}$

◇ **Exercice 9** (Parité). Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$ tel que $-a$ appartienne aussi à I .

1. Montrer que si f est paire, $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$
2. Montrer que si f est impaire, $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

◇ **Exercice 10** (Une fonction continue par morceaux). Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Calculer $\int_m^n [t] dt$

Exercice 11 (Valeur moyenne d'une fonction). Si $a < b$ et f est continue sur le segment $[a; b]$, on appelle **valeur moyenne** de f la quantité $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$

1. Interpréter ce nom de valeur moyenne
2. Soient m et M deux réels tels que pour tout $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$, montrer, après avoir justifié l'existence de m et M , que $m \leq \mu \leq M$.

Sommes de Riemann

Exercice 12. Déterminer la limite des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

1. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$
2. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$
3. $u_n = \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}}$

Suites d'intégrales

◇ **Exercice 13.** Calculer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$
2. $u_n = \int_0^n \frac{dt}{1+e^{nt}}$

Exercice 14 (Lemme de Riemann-Lebesgue et intégration par parties). Montrer que si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Exercice 15. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx$.

1. En effectuant le changement de variable défini par $t = \sin x$, déterminer u_0 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$.
3. Déterminer la convergence de la suite (u_n) .

Problème classique

♡ **Exercice 16** (Intégrales de Wallis). On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n dt$$

1. Calculer les valeurs de W_0 et W_1
2. Montrer que pour tout n , $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt$
3. Montrer que la suite W_n est décroissante.
4. En intégrant par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$
5. Par récurrence, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,
 - (a) $W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$
 - (b) $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$
6. Montrer que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)$ est constante et calculer sa valeur.