

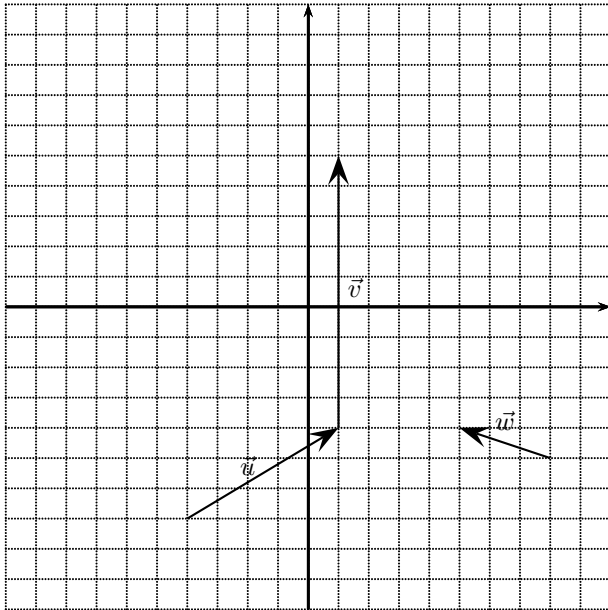
CHAPITRE 15 : ESPACES VECTORIELS

Algèbre 3

C'est la première fois depuis le début de l'année qu'on découvre un univers complètement nouveau ... on s'appuiera sur un **maximum de dessins** dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ pour se construire une intuition ! Et pour encore mieux visualiser les notions, voir la **formidable** série de vidéos de 3Blue1Brown

I. Notion d'espace vectoriel

1. Cas particulier : les vecteurs du plan euclidien



Rappel : On définit sur les vecteurs du plan deux opérations $+$ et $\cdot$:

- Représenter $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{v} + \vec{u}$ sur la grille ci-contre
- Représenter $1 \cdot \vec{u}$, $-(0, 5) \cdot \vec{u}$ et $(-0, 5) \cdot \vec{u}$
- Représenter $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ et $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Représenter $\vec{v} + (-\vec{v})$
- Représenter $2 \cdot (\vec{u} + \vec{w})$ et $(2 \cdot \vec{u}) + (2 \cdot \vec{w})$

Quelles propriétés de calcul reconnaît-on ?

Dans la suite, on appellera vecteurs toutes sortes d'objets qui ont ces mêmes propriétés.

2. Définition

Remarque. Pour bien commencer le chapitre : chercher dans les cours précédents tous les endroits où l'on parle de «somme, et multiplication par un réel»

Définition 1 (Espace vectoriel). Soit E un ensemble, $+$: $E^2 \rightarrow E$ une loi de composition *interne* appelée **addition** et $\cdot$: $\mathbb{R} \times E \rightarrow E$ une loi de composition *externe* appelée **multiplication par un réel**.

$(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel (ou $\mathbb{R}$ -espace vectoriel) si :

1. $+$ vérifie les propriétés suivantes :
 - (a) associativité : $\forall (x, y, z) \in E^3, x + (y + z) = (x + y) + z$
 - (b) commutativité : $\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$
 - (c) existence d'un neutre noté 0_E : $\exists 0_E \in E, \forall x \in E, 0_E + x = x + 0_E = x$
 - (d) tout élément admet un opposé : $\forall x \in E, \exists x' \in E, x + x' = 0_E$
2. $\cdot$ vérifie les propriétés suivantes :
 - (a) 1 est un neutre : $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$
 - (b) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \mu) \cdot x$
3. Les deux lois interagissent «bien» (deux distributivités) :
 - (a) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) + (\mu \cdot x)$
 - (b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

On appellera alors **vecteur** tout élément d'un espace vectoriel.

♥ 3. Espaces vectoriels de référence

Dans toute cette partie, on reconnaît des ensembles déjà connus comme étant des espaces vectoriels. Cette liste d'exemples est à connaître !

a. n -uplets

Propriété 2. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ terme à terme est un espace vectoriel.

Exemples. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

Démonstration. Vérifier les ensembles de départ et d'arrivée de $+$ et $\cdot$, puis les 8 propriétés de la définition.

Démonstration faite dans $\mathbb{R}^3$ à valeur générale.

b. Espace vectoriel des polynômes

Propriété 3. $\mathbb{R}[x]$ est un espace vectoriel.

Démonstration. Laissé en exercice - cf chapitre 11

c. Espaces vectoriels de suites

Propriété 4. L'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites muni des opérations $+$ et $\cdot$ terme à terme est un espace vectoriel.

Démonstration. Idem.

d. Espaces vectoriels de matrices

Propriété 5. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ muni des opérations matricielles usuelles est un espace vectoriel.

Démonstration. Laissé en exercice - cf chapitre 8

Exemple. $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, mais aussi tous les espaces de matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, etc.

e. Espaces vectoriels de fonctions

Propriété 6. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de A dans $\mathbb{R}$, on définit pour toutes fonctions f, g et tout réel λ

$$1. f + g \text{ par } \forall x \in A, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$2. \lambda f \text{ par } \forall x \in A, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Alors $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Exemple. Fonctions de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (suites)

4. Propriétés de calcul dans les espaces vectoriels

On se place dans tout ce qui va suivre dans un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .

Propriété 7 (Multiplications par 0).

$$1. \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot 0_E = 0_E$$

$$2. \forall u \in E, 0 \cdot u = 0_E$$

Propriété 8 (Opposé).

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, (-\lambda)x = -(\lambda x)$$

Cette propriété permet de définir $-\lambda x$ sans ambiguïté, et de définir la soustraction ayant les mêmes propriétés de distributivité que $+$: $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$

Propriété 9 (Simplifications).

1. $\forall (u, v, w) \in E^3, u + v = u + w \Leftrightarrow v = w$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \lambda u = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E)$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in E^2, \lambda u = \lambda v \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } u = v)$
4. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall u \in E, \lambda u = \mu u \Leftrightarrow (u = 0 \text{ ou } \lambda = \mu)$

Démonstration (Des propriétés 7 à 9). Pour s'entraîner à utiliser la définition des espaces vectoriels.

Remarque : nous avions démontré ces propriétés dans le cas particulier des matrices. Maintenant, ça découle d'un cadre plus général !

II. Sous-espaces vectoriels

1. Définition

Définition 10. Si E est un espace vectoriel et $F \subset E$, on dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

1. $0_E \in F$
2. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in F, \lambda.x + \mu.y \in F$ (F est **stable par combinaison linéaire**)

Exemples. Les ensembles suivants sont des sous-e.v. de certains espaces vectoriels de référence :

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
2. $\mathbb{R}_n[x]$
3. $\mathcal{C}^0([0; 1])$
4. $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | 3x + 2y = 0\}$
5. $\{M \in \mathcal{M}_{3;3}(\mathbb{R}) | M \text{ est symétrique}\}$
6. L'ensemble des suites qui tendent vers 0

Exemples (Exemples de sous-ensembles qui ne sont **pas** des sous-espaces vectoriels).

1. $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$
2. $\{0; 1\} \subset \mathbb{R}$
3. $\emptyset \subset \mathbb{R}^3$
4. $\{M \in \mathcal{M}_{2;2}(\mathbb{R}) | M \text{ est inversible}\} \subset \mathcal{M}_{2;2}(\mathbb{R})$

Propriété 11. Tout sous-espace vectoriel de E est lui-même un espace vectoriel.

Il est beaucoup plus efficace de montrer que F est un sous-ev. d'un espace E que de montrer que c'est un espace vectoriel en revenant à la définition.

Vrai/Faux Ces ensembles sont-ils des s.e.v. d'un ensemble de référence ?

1. Les suites bornées
2. Les suites décroissantes
3. Les suites périodiques
4. Les suites qui tendent vers $+\infty$
5. Les polynômes constants
6. Les polynômes de degré 3
7. Les polynômes dont le terme constant est nul
8. Les polynômes à coefficients positifs (ou nuls)
9. Les fonctions telles que $f(0) = f(1)$
10. Les fonctions telles que $f(0) = 1$
11. Les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$
12. Les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\int_0^1 f(x)dx = 0$

2. Opérations

Propriété 12 (Intersection). Si $F, G \subset E$ sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors $F \cap G$ aussi.

Démonstration.

Remarque. L'union de deux sous-ev n'est en général pas un sous-espace vectoriel : exemple de deux droites vectorielles dans le plan. À quelle condition $F \cup G$ est un sev ?

♥ **Définition 13** (Somme de sous-espaces vectoriels). Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , on définit $F + G$ l'ensemble :

$$\{x + y | x \in F, y \in G\}$$

Propriété 14. La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

Exemple. Prenons $F = \{(x; 0; 0) | x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0; x; 0) | x \in \mathbb{R}\}$. Qu'est-ce que $F + G$?

Définition 15 (Somme directe). Si F et G sont deux sous espaces vectoriels et que $F \cap G = \emptyset$, on dit que F et G sont **en somme directe**. On note alors $F \oplus G$ leur somme. Si de plus $F \oplus G = E$, on dit que F et G sont **supplémentaires**.

Remarque. À ne pas confondre avec le *complémentaire*.

Propriété 16. Si $F + G = E$, alors tout élément de E s'écrit comme somme d'un élément de F et d'un élément de G . Si $F \cap G = \{0\}$, alors cette écriture est unique :

$$\forall x \in F \oplus G, \exists!(x_F, x_G) \in F \times G, x_F + x_G = x$$

Démonstration.

Exercice. Montrer que l'ensemble F des matrices symétriques et l'ensemble G des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$.

♣ Montrer que les ensembles $F = \{(x; 0) | x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0; x) | x \in \mathbb{R}\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$

Remarque (Généralisation). On peut définir plus généralement

$$F_1 + \dots + F_n := \{x_1 + \dots + x_n | (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n\}$$

On utilisera alors comme définition de la somme directe l'unicité de l'écriture.

Exemple. Il ne suffit pas de montrer que les intersections sont deux à deux réduites à 0.

$$F_1 = \left\{ \lambda u | \lambda \in \mathbb{R}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, F_2 = \left\{ \lambda v | \lambda \in \mathbb{R}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, F_3 = \left\{ \lambda w | \lambda \in \mathbb{R}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

III. Familles de vecteurs

Dans tout ce qui suit, E désigne un espace vectoriel, et on appelle **famille de vecteurs** toute liste finie de vecteurs $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

1. Familles génératrices

Définition 17. On appelle **combinaison linéaire** de la famille $(v_1, \dots, v_n)$ tout vecteur de la forme

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \text{ où } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$$

Notation. On note $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$. **Dessins !**

Propriété 18. $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ est un sous-espace vectoriel de E . On l'appelle **sous-espace vectoriel engendré par** $(v_1, \dots, v_n)$.

Démonstration.

- Décrire $\text{Vect}((1, 0, 0), (-1, -1, 0))$ dans $\mathbb{R}^3$

Exemples.

- Décrire $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Définition 19. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Si $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n) = F$, on dit que $(v_1, \dots, v_n)$ **engendre** F , ou bien que c'est **une famille génératrice** de F .

Remarque. Un même espace vectoriel peut admettre plusieurs familles génératrices.

Exemple. $((1, 0), (0, 1))$ ou $((1, 0), (1, 1))$ dans $\mathbb{R}^2$

Propriété 20. Soit $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ une famille finie de E .

- $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n) \subset \text{Vect}(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$
- $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n, 0_E) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$
- Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$, alors $\text{Vect}(\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$
- Si $v_{n+1} \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$, alors $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$

Démonstration.

- Exercice.*
- Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en trouvant une famille génératrice (évidente) de F .
 - Montrer que $\mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$ est une autre famille génératrice de F .

Propriété 21. Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice et $\mathcal{G}$ est une famille qui contient $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{G}$ est une famille génératrice.

2. Familles liées, familles libres

Définition 22. Une famille $\mathcal{L} = (v_1, \dots, v_n)$ est dite **libre** si :

$$\forall (\lambda_1; \dots; \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow \forall k \in [1; n], \lambda_k = 0 \right)$$

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**

Remarque. Cette définition signifie que la seule possibilité pour obtenir 0 comme combinaison linéaire des v_k est la combinaison nulle.

Propriété 23. $(v_1, \dots, v_n)$ est libre si et seulement si chaque élément de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ possède une unique écriture comme combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_n$

Exemples. Montrer que les vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ et $(2, 3, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ forment une famille libre. Montrer que les vecteurs $(3, 0, 1)$, $(0, 0, 1)$ et $(6, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ forment une famille liée.

Remarque. La preuve qu'une famille est libre doit commencer par «Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k = 0$ »

Propriété 24. Une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

Démonstration.

Propriété 25 (Cas particuliers).

- Soit $u \in E$. La famille (u) est libre ssi $u \neq 0$.
- Soient $(u, v) \in E^2$. La famille (u, v) est libre ssi u et v ne sont pas colinéaires (ou proportionnels).
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre, toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- Toute famille contenant 0_E est liée.

Démonstration.

Exemple. Montrer que les vecteurs $(2, -4)$ et $(-3, 6)$ de $\mathbb{R}^2$ forment une famille liée. Montrer que les vecteurs $(2, -4)$, $(1, 0)$ et $(-3, 6)$ de $\mathbb{R}^2$ sont liés.

Remarque. La notion de famille liée généralise donc la notion de vecteurs colinéaires dans le plan, de vecteurs coplanaires dans l'espace.

3. Bases

Définition 26. Si $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ est une famille libre et génératrice de E , on dit que $\mathcal{B}$ est **une base** de E .

Exemple. Montrer que $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 0, 1), (2, 3, 0))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Propriété 27. Une famille $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$

Bases canoniques

- Pour tout $i \in [1; n]$, posons $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 est en i -ème position. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^n$. **Exemple :** $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ dans $\mathbb{R}^3$, $((1, 0), (0, 1))$ dans $\mathbb{R}^2$ (dessin !)
- La famille $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ est appelée base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
- On appelle matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices composant un 1 à un des coefficients de la matrice et des 0 partout ailleurs, c'est-à-dire qu'on appelle matrice élémentaire $E_{i,j}$:

$$\forall (k, l) \in [1; n] \times [1; p], (E_{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'ensemble des matrices élémentaires est appelé base canonique de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$

Exemple. Écrire la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. Combien a-t-elle d'éléments ?

Définition 28. Un espace vectoriel qui admet **au moins une base** est dit **de dimension finie**

Exemple (Espace vectoriel de dimension infinie). $\mathbb{R}[x]$ n'admet pas de base (deux techniques : penser degré, ou dérivation). De même pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.