

Feuille d'exercices n°15

Espaces et sous espaces

Exercice 1. Représenter ces ensembles dans le plan $\mathbb{R}^2$. Lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$
2. $F_2 = \mathbb{Z}^2$
3. $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x = y\}$
4. $F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
5. $F_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
6. $F_6 = \{(x - y, 5x + 6y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 2. Pour les ensembles suivants, montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de référence bien choisi. On pose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice.

1. $C_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$
2. L'ensemble des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$
3. L'ensemble des polynômes P tels que $P(0) = 0$
4. L'ensemble des polynômes divisibles par $x^2 - 1$

◇ **Exercice 3.** Montrer que les ensembles suivants ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. $F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = f(0) + 1\}$
2. F_2 l'ensemble des fonctions monotones.

Exercice 4. Soit F l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ et $G = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)dt = 0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Montrer que F et G sont en somme directe.

Combinaisons linéaires, familles libres et génératrices

Exercice 5.

Quels sont les réels m tels que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$ soit combinaison linéaire des matrices $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$?

◇ **Exercice 6.**

1. Montrer que $D = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n\}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Déterminer deux suites qui engendrent cet espace.
3. Montrer que ces deux suites forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Exercice 7 (Rang). Soit $E = \mathbb{R}^3$. Les familles suivantes sont-elles libres ? Si non, extraire une sous-famille libre avec le plus de vecteurs possibles. Indiquer le nombre de vecteurs de leur plus grande sous-famille libre.

1. $\mathcal{F}_1 = ((2, 0, 3), (1, 7, 2))$
2. $\mathcal{F}_2 = ((1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 6), (0, 2, 1))$
3. $\mathcal{F}_3 = ((-5, -2, 1), (0, 1, 4), (-5, 0, 9))$

Exercice 8 (Familles libres de polynômes). On considère les polynômes :

- $P_1 = X^3 - 2X + 1$
- $P_2 = X^2$
- $P_3 = X^3 - X^2 + X$
- $P_4 = 2X^3 + 2X^2 - 7X + 3$

La famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 9 (Familles libres de polynômes - degrés étagés). Montrer que la famille $(4, 2X + 1, X^2 - 3X, 4X^3 - 1)$ est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$. Comment peut-on généraliser ce résultat ?

◇ **Exercice 10.** Les fonctions sin et cos forment-elles une famille libre ?

Exercice 11. Montrer que la famille $\mathcal{F} = ((0, 5, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12 (Bases). Montrer que les espaces suivants sont des espaces vectoriels et déterminer une base de chacun.

1. $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = M\}$
2. $G = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid \forall x \in \mathbb{R}, P(x) - xP'(x) = 0\}$
3. $H = \{P \in \mathbb{R}_5[x] \mid A \text{ divise } P\} \text{ où } A(x) = x^2 + 5$

Exercice 13. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{B} = (1, (X - a), (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 14 (Fonctions affines). Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Les ensembles suivants sont-ils des s.e.v. de E ? Si oui, les écrire sous la forme d'espaces engendrés par une famille de vecteurs.

1. $F_1 = \{x \mapsto ax \mid a \in \mathbb{R}\}$
2. $F_2 = \{x \mapsto ax + 1 \mid a \in \mathbb{R}\}$
3. $F_3 = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

On admet que l'ensemble $G = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et un sous-e.v. de E . Montrer que $F_3 \oplus G = E$

Théorique

Exercice 15. Soient E un espace vectoriel et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E . Démontrer que F, G et H sont en somme directe si et seulement si $(F \cap G = \{0\} \text{ et } (F + G) \cap H = \{0\})$.

◇

Exercice 16. Soit E un espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E . Pour tout $k \in [1, n]$ on pose $v_k = u_1 + u_2 + \dots + u_k$. Montrer que $(v_k)_{k \in [1; n]}$ est une famille libre si et seulement si $(u_k)_{k \in [1; n]}$ l'est.

Indication : manipuler !