

Feuille d'exercices n°14

Exercice 2. Déterminer, pour chaque intervalle sur lequel elle est définie, une primitive de la fonction f définie par :

1. $f(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 1} \ln(x^3 + 1)$

2. $f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + (\ln x)^2}$
 $\arctan(\ln(x))$

3. $f(x) = \sin x \cos x$
 $\frac{\sin(x)^2}{2}$

4. $f(x) = \frac{\ln(x) + 1}{x}$
 $\frac{(\ln(x)+1)^2}{2}$

5. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - x\sqrt{2}$
 $4\sqrt{x} - \frac{x^2}{\sqrt{2}}$

6. $f(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{x^2}{4}$
 $-\frac{4}{x} + \frac{x^3}{12}$

Exercice 3 (Équation différentielle). Soient g une fonction continue sur un intervalle I et G une primitive de g sur I . Soit f une fonction dérivable vérifiant $f' = fg$.

1. En posant, pour tout $x \in I$, $C(x) = f(x)e^{-G(x)}$, déterminer la forme générale de la fonction f .
 C est dérivable puisque G et f le sont. Alors, pour tout $x \in I$,

$$C'(x) = f(x) \times (-g(x))e^{-G(x)} + f'(x)e^{-G(x)} = (fg - f')(x)e^{-G(x)} = 0$$

Puisque I est un intervalle, C est une fonction constante égale à un réel λ . Ainsi :

$$f(x) = C(x)e^{G(x)} = \lambda e^{G(x)}$$

2. Etudier la réciproque.

Réciproquement, si f est de la forme $x \mapsto ce^{G(x)}$ avec c un réel, alors $f'(x) = c \times G'(x)e^{G(x)} = g(x)f(x)$

3. Conclure.

Les solutions de l'équation $f' = fg$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto ce^{G(x)}$, $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Déterminer une primitive de $x \mapsto x \sin(x)$ en intégrant par parties.

Une primitive de $x \mapsto x \sin(x)$ est :

$$x \mapsto \int_0^x t \sin(t) dt = [-t \cos(t)]_0^x - \int_0^x (-\cos(t)) dt = -x \cos(x) + [\sin(t)]_0^x = -x \cos(x) + \sin(x)$$

À vérifier dans le sens inverse : quand on dérive $-x \cos(x) + \sin(x)$, on obtient $-\cos(x) - x(-\sin(x)) + \cos(x) = x \sin(x)$!

Exercice 6 (IPP). Calculer les intégrales suivantes pour $x \in \mathbb{R}$:

1. $\int_1^e t^2 \ln(t) dt$

$$\int_1^e t^2 \ln(t) dt = \left[\frac{t^3}{3} \ln(t) \right]_1^e - \int_1^e \frac{t^3}{3} \times \frac{1}{t} dt = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^e = \frac{2e^3+1}{9}$$

2. $\int_1^e t^n \ln(t) dt$

$$\int_1^e t^n \ln(t) dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln(t) \right]_1^e - \int_1^e \frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{t} dt = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_1^e = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

3. $\int_1^x (\ln t)^2 dt$

$$\int_1^x (\ln t)^2 dt = [t(\ln t)^2]_1^x - \int_1^x t \times 2 \frac{1}{t} \ln(t) dt = x(\ln x)^2 - \int_1^x 2 \ln(t) dt = x(\ln x)^2 - 2(x \ln(x) - x + 1)$$

4. $\int_1^x \sin(\ln t) dt$

$$\int_1^x \sin(\ln t) dt = [t \sin(\ln t)]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} \times \cos(\ln t) dt = x \sin(\ln x) - \int_1^x \cos(\ln t) dt$$

Recommençons avec une seconde intégration par parties :

$$\int_1^x \cos(\ln t) dt = [t \cos(\ln t)]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} \times (-\sin(\ln t)) dt = x \cos(\ln(x)) + \int_1^x \sin(\ln t) dt$$

En appelant $I = \int_1^x \sin(\ln t) dt$, on a donc obtenu :

$$I = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - I$$

i.e. :

$$I = \frac{x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2}$$

5. $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt &= \left[-\frac{\ln(1+t)}{t} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t(1+t)} dt \\ &= \ln(2) - \frac{\ln(3)}{2} + \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \ln(2) - \frac{\ln(3)}{2} + [\ln(t) - \ln(1+t)]_1^2 \\ &= \ln(2) - \frac{\ln(3)}{2} + \ln(2) - \ln(3) - \ln(1) + \ln(2) \\ &= 3\ln(2) - \frac{3\ln(3)}{2} \end{aligned}$$

6. $\int_0^\pi \sin(t) e^t dt$

$$\int_0^\pi \sin(t) e^t dt = [\sin(t) e^t]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(t) e^t dt = - \int_0^\pi \cos(t) e^t dt$$

Refaisons une intégration par parties :

$$- \int_0^\pi \cos(t) e^t dt = - \left([\cos(t) e^t]_0^\pi - \int_0^\pi (-\sin(t)) e^t dt \right) = - \left(1 - e^\pi + \int_0^\pi \sin(t) e^t dt \right)$$

En appelant $I = \int_0^\pi \sin(t) e^t dt$, on a :

$$I = e^\pi - 1 - I$$

i.e. $I = \frac{e^\pi - 1}{2}$

Exercice 8 (Changement de variable). Calculer :

1. $\int_{-1}^1 e^{2x+1} dx$

Posons $u = 2x + 1$ (i.e. $du = 2dx$).

$$\int_{-1}^1 e^{2x+1} dx = \int_{-1}^3 e^u \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} [e^u]_{-1}^3 = \frac{1}{2} (e^3 - e^{-1})$$

2. $\int_0^1 (3x-4)^2 dx$

Posons $u = 3x - 4$ ($du = 3dx$)

$$\int_0^1 (3x-4)^2 dx = \int_{-4}^{-1} u^2 \times \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \left[\frac{u^3}{3} \right]_{-4}^{-1} = \frac{1}{9}(-1 - 64) = -\frac{65}{9}$$

3. $\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$ (poser $x = -\ln t$)

On pose $x = -\ln(t)$ i.e. $t = e^{-x}$. $dx = -\frac{1}{t} dt$.

$$\int_1^{e^{-1}} -\frac{1}{t} \times \frac{1}{\frac{1}{t} + 1} dt = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{t+1} dt = [\ln(1+t)]_{\frac{1}{e}}^1 = \ln(2) - \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)$$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{6-5\sin x + \sin^2 x} dx$ (poser $u = \sin x$)

On pose $u = \sin(x)$ donc $du = \cos(x)dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{6-5\sin(x) + \sin^2(x)} = \int_0^1 \frac{du}{6-5u+u^2}$$

On cherche a, b tels que $\frac{1}{u^2-5u+6} = \frac{a}{u-3} + \frac{b}{u-2} = \frac{a(u-2)+b(u-3)}{(u-2)(u-3)} = \frac{(a+b)u-2a-3b}{u^2-5u+6}$. On a alors :

$$a+b=0 \quad \text{et} \quad 2a+3b=-1$$

donc $a=1$ et $b=-1$, i.e. $\frac{1}{u^2-5u+6} = \frac{1}{u-3} - \frac{1}{u-2}$. Retour à l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{du}{6-5u+u^2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u-2} \right) du = [\ln(3-u) - \ln(2-u)]_0^1 = \ln(2) - \ln(3) + \ln(2) = 2\ln(2) - \ln(3)$$

5. $\int_0^1 \frac{t^2-3t+1}{\sqrt{2t+3}} dt$

Posons $u = 2t + 3$. On a alors $du = 2dt$, $t = \frac{1}{2}(u-3)$ et $t^2 - 3t + 1 = \frac{u^2}{4} - 3u + \frac{31}{4}$

$$\int_0^1 \frac{t^2-3t+1}{\sqrt{2t+3}} dt = \int_3^5 \left(\frac{1}{8}u^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{u} + \frac{31}{8} \right) du$$

Puis on primitive terme par terme

6. $\int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x-1} dx$

Posons $u = e^x$. $du = e^x dx$.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x-1} dx &= \int_e^{e^2} \frac{udu}{u-1} \\ &= \int_e^{e^2} \left(1 + \frac{1}{u-1} \right) du \\ &= [u + \ln(u-1)]_e^{e^2} \\ &= e^2 - e + \ln(e^2-1) - \ln(e-1) \\ &= e^2 - e + \ln(e+1) \end{aligned}$$

Exercice 11 (Valeur moyenne d'une fonction). Si $a < b$ et f est continue sur le segment $[a; b]$, on appelle **valeur moyenne** de f la quantité $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$

- Interpréter ce nom de valeur moyenne

Faire un dessin. Si on dessine f et la fonction constante égale à μ , le rectangle d'intégration de la constante a la même aire que l'intégrale de f

-
2. Soient m et M deux réels tels que pour tout $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$, montrer, après avoir justifié l'existence de m et M , que $m \leq \mu \leq M$.
 m et M existent par théorème des bornes (fonction continue sur un segment). On conclut ensuite par croissance de l'intégrale.

Exercice 14 (Lemme de Riemann-Lebesgue et intégration par parties). Montrer que si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut intégrer par parties :

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt = \left[-\frac{1}{n} \cos(nt) f(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{1}{n} f'(t) \cos(nt) dt$$

Or, puisque f et f' sont continues sur $[a; b]$, il existe M_1, M_2 telles que $|f| \leq M_1$ et $|f'| \leq M_2$. Ainsi :

$$\left| \frac{1}{n} \cos(nt) f(t) \right| \leq \frac{1}{n} M_1$$

$$\left| \int_a^b \frac{1}{n} f'(t) \cos(nt) dt \right| \leq \frac{1}{n} M_2 (b - a)$$

Ainsi :

$$0 \leq \left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| \leq \frac{2}{n} M_1 + \frac{1}{n} M_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par théorème des gendarmes, l'intégrale tend vers 0.