

Devoir Maison n°12 - Algèbre linéaire

DANS $\mathbb{R}^4$

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, -1, 1, 1), \quad v_2 = (3, 2, -1, 4), \quad v_3 = (-1, -9, 7, -3)$$

On pose $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x = y = z = -t\}$

1. (a) La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre dans $\mathbb{R}^4$?
 (b) En déduire une base $\mathcal{B}$ de F
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ dont on déterminera une base.
3. Montrer que F et G sont en somme directe.

DANS UN ESPACE DE DIMENSION INFINIE

On note E l'ensemble des fonctions réelles définies et **deux fois** dérivables sur $\mathbb{R}$. On rappelle que E , muni des lois habituelles, possède une structure d'espace vectoriel. On note F le sous-ensemble de E défini par :

$$F = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = (1 + x^2)f(x)\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que si f et g sont deux éléments de F , alors $f'g - fg'$ est une fonction constante.
3. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$
 (a) Vérifier que φ est un élément de F
 (b) Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \varphi(x) \int_0^x \frac{1}{\varphi(t)^2} dt$$

Montrer que ψ est un élément de F

4. (a) Soit f un élément de F . Montrer, en utilisant le résultat de la question 2 appliqué aux fonctions f et φ , que f est une combinaison linéaire de φ et de ψ
 (b) Montrer finalement que (φ, ψ) est une base de F . En déduire les solutions de l'équation différentielle :

$$f''(x) = (1 + x^2)f(x)$$